

**ВОЕННО-КОСМИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ**  
**имени А.Ф. Можайского**

---

**В.П. Лачугин, Г.В. Сологуб, В.А. Янковский**

**ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ**  
**СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА**

**Учебное пособие**

**Санкт-Петербург**  
**2011**

ВОЕННО-КОСМИЧЕСКАЯ АКАДЕМИЯ  
имени А.Ф. Можайского

---

В.П. Лачугин, Г.В. Сологуб, В.А. Янковский

# **ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА**

Учебное пособие

Под общей редакцией кандидата технических наук  
доцента **В.П. Лачугина**



Санкт-Петербург  
2011

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор **В.Н. Арсеньев**;  
кандидат технических наук, доцент **С.Б. Силантьев**

**Лачугин В.П.**

Линейные электрические цепи синусоидального тока: учеб.  
пособие /В.П. Лачугин, Г.В. Сологуб, В.А. Янковский. – СПб.:  
ВКА им. А.Ф. Можайского, 2011.– 79 с.

Учебное пособие предназначено для слушателей и курсантов, изучающих дисциплины «Теоретические основы электротехники», «Общая электротехника и электроника», а также «Электротехника и электроника», в содержание которых включен раздел «Линейные электрические цепи синусоидального тока».

Названные дисциплины являются федеральным компонентом подготовки слушателей и курсантов всех специальностей академии.

УДК

© ВКА им. А.Ф. Можайского, 2011

---

Подписано к печ. 30.12.2010  
Заказ 2081

Печ. л. 10  
Бесплатно

Уч.–изд. л.4,75

---

Типография ВКА им. А.Ф. Можайского

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                                              |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Предисловие.....                                                                                             | 5  |
| 1 Принцип получения синусоидальной ЭДС.....                                                                  | 6  |
| 2 Основные понятия о синусоидальных ЭДС,<br>напряжениях и токах.....                                         | 10 |
| 3 Действующие и средние значения синусоидальных ЭДС,<br>напряжений и токов.....                              | 13 |
| 4 Изображение синусоидальных ЭДС, напряжений и токов<br>вращающимися векторами. Векторные диаграммы.....     | 16 |
| 5 Особенности процессов в электрических цепях<br>синусоидального тока.....                                   | 20 |
| 5.1 Особенности применения законов электрических<br>цепей в цепях синусоидального тока.....                  | 20 |
| 5.2 Понятие о поверхностном эффекте в проводниках.....                                                       | 22 |
| 6 Простейшие электрические цепи синусоидального тока....                                                     | 24 |
| 6.1 Цепь с резистивным элементом.....                                                                        | 24 |
| 6.2 Цепь с индуктивным элементом.....                                                                        | 28 |
| 6.3 Цепь с емкостным элементом.....                                                                          | 32 |
| 6.4 Схемы замещения резисторов, катушек индуктивности и<br>конденсаторов.....                                | 36 |
| 7 Электрическая цепь с последовательным соединением<br>активного сопротивления, индуктивности и ёмкости..... | 38 |
| 7.1 Основные соотношения между током<br>и напряжениями.....                                                  | 38 |
| 7.2 Мощности цепи.....                                                                                       | 43 |
| 7.3 Резонанс напряжений.....                                                                                 | 49 |
| 7.4 Частотные характеристики цепи.....                                                                       | 53 |
| 7.5 Расчёт цепи с последовательным соединением<br>активного сопротивления, индуктивности и ёмкости.....      | 59 |
| 8 Электрическая цепь с параллельным соединением<br>активного сопротивления, индуктивности и ёмкости.....     | 62 |
| 8.1 Основные соотношения между напряжением<br>и токами.....                                                  | 62 |

|                                                                                                     |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 8.2 Резонанс токов.....                                                                             | 69 |
| 8.3 Частотные характеристики цепи.....                                                              | 72 |
| 8.4 Расчёт цепи с параллельным соединением<br>активного сопротивления, индуктивности и ёмкости..... | 75 |
| Заключение.....                                                                                     | 78 |
| Список литературы.....                                                                              | 79 |

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Линейные электрические цепи синусоидального тока находят самое широкое применение в электротехнике и электронике. Поэтому изучение свойств и процессов, протекающих в таких цепях, является важной научной и инженерной задачей подготовки специалистов электротехнического направления.

В данном учебном пособии рассмотрены основные составные элементы, свойства и установившиеся процессы, протекающие в классических линейных электрических цепях синусоидального тока с сосредоточенными параметрами.

Учебное пособие написано в соответствии с последними требованиями государственных стандартов в области электротехники и предназначено для изучения курсантами и слушателями дисциплин «Теоретические основы электротехники», «Общая электротехника и электроника» и «Электротехника и электроника».

Учебное пособие написано коллективом авторов: В.П. Лачугин – главы 1, 2, 4–7; Г.В. Сологуб – 8; В.А. Янковский – 3.

Общее редактирование учебного пособия выполнил В.П. Лачугин.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам профессору В.Н. Арсеньеву и доценту С.Б. Силантьеву, а также доцентам И.И. Захарчуку и Ю.А. Кузьмичеву, которые внимательно просмотрели учебное пособие и сделали ряд ценных замечаний.

## 1 ПРИНЦИП ПОЛУЧЕНИЯ СИНУСОИДАЛЬНОЙ ЭДС

В общем случае *переменными* называются такие ЭДС, напряжения и токи, значения которых изменяются во времени.

Переменные ЭДС, напряжения и токи, значения которых повторяются через равные промежутки времени, называются *периодическими* (рис. 1.1, а, в, з).

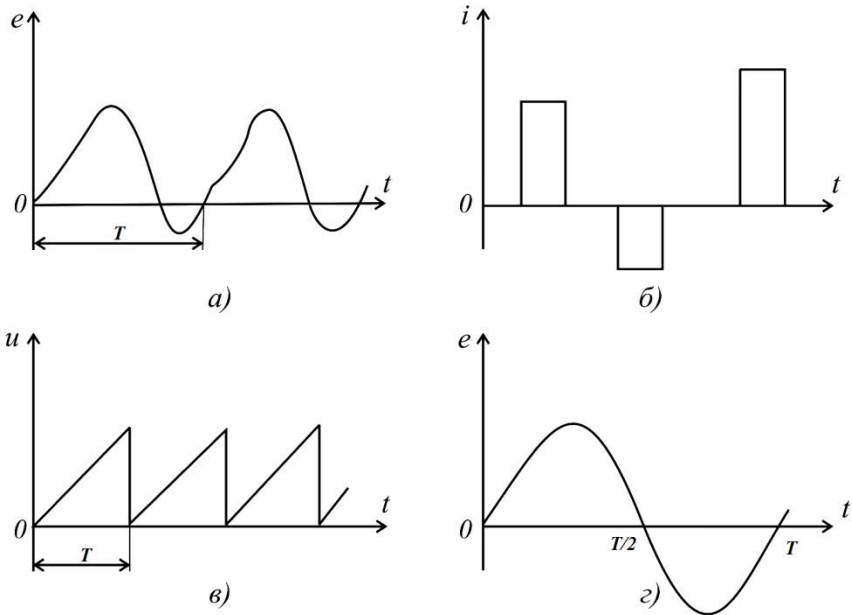


Рис. 1.1

Для периодических величин справедливы равенства:

$$e(t) = e(t + T), \quad u(t) = u(t + T), \quad i(t) = i(t + T),$$

где  $T$  – наименьший промежуток времени повторения периодических величин, называемый **периодом**.

Наиболее широко в электротехнике применяются синусоидальные ЭДС, напряжения и токи, представленные на рис. 1.1, з.

Для получения синусоидальных ЭДС применяют специальные источники – электромеханические или электронные генераторы.

Принцип получения синусоидальной ЭДС рассмотрим на примере простейшего электромеханического генератора, представленного на рис. 1.2. Такой генератор состоит из неподвижной части – статора 1, и вращающейся части – ротора 2.

Ротор представляет собой электромагнит. Его сердечник и полюсные наконечники выполняются из электротехнической стали. Обмотка ротора служит для создания магнитного поля генератора, поэтому она с помощью колец и щёток подключена к внешнему источнику постоянного тока  $I_B$ .

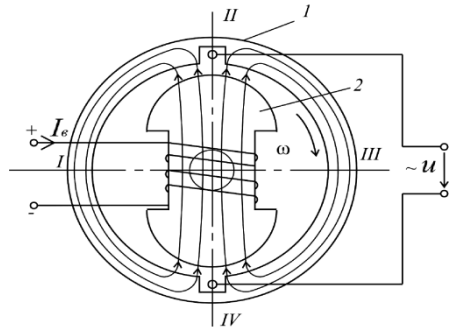


Рис. 1.2

Статор состоит из сердечника и статорной обмотки. Сердечник статора, являющийся составной частью магнитной цепи генератора, также выполняется из электротехнической стали. В пазах сердечника статора находятся проводники статорной обмотки, в которых и индуцируется ЭДС. Обмотки статора и ротора обычно изготавливаются из меди.

При вращении ротора в статорной обмотке возникает ЭДС:

$$e = B l v N,$$

где  $B$  – радиальная составляющая индукции магнитного поля;

$l$  – активная длина проводника;

$v$  – линейная скорость перемещения магнитного поля относительно проводников обмотки статора;

$N$  – число проводников статорной обмотки.

Значения  $l$ ,  $V$  и  $N$  являются для данного генератора постоянными. Следовательно, для получения синусоидальной ЭДС магнитная индукция  $B$  должна изменяться по синусоидальному закону. Это достигается выбором такой формы полюсных наконечников, чтобы воздушный зазор между обмоткой статора и полюсным наконечником увеличивался от его середины к краям, а магнитная индукция в воздушном зазоре, наоборот, уменьшалась. Таким образом, при вращении ротора магнитная индукция около неподвижного проводника будет изменяться по синусоидальному закону, представленному на рис. 1.3, а:

$$B = B_m \sin \alpha,$$

где  $B_m$  – максимальное значение магнитной индукции, когда проводник находится над серединой полюсного наконечника;

$\alpha$  – угол поворота ротора.

Тогда значение ЭДС можно записать в виде

$$e = B_m l V N \sin \alpha = E_m \sin \alpha,$$

где  $E_m$  – максимальное значение ЭДС, определяемое конструктивными данными генератора и скоростью вращения ротора,  $E_m = B_m l V N$ .

Угол поворота ротора определяется известным соотношением

$$\alpha = \omega t,$$

где  $\omega$  – угловая скорость вращения ротора;

$t$  – время.

Заменив в выражении для ЭДС угол  $\alpha$  на  $\omega t$ , получим закон её изменения во времени, представленный на рис. 1.3, б:

$$e = E_m \sin \omega t.$$

При  $\alpha = 2\pi$  (один полный оборот ротора) время  $t = T$ , т.е.  $2\pi = \omega T$ .

Из последнего равенства следует, что

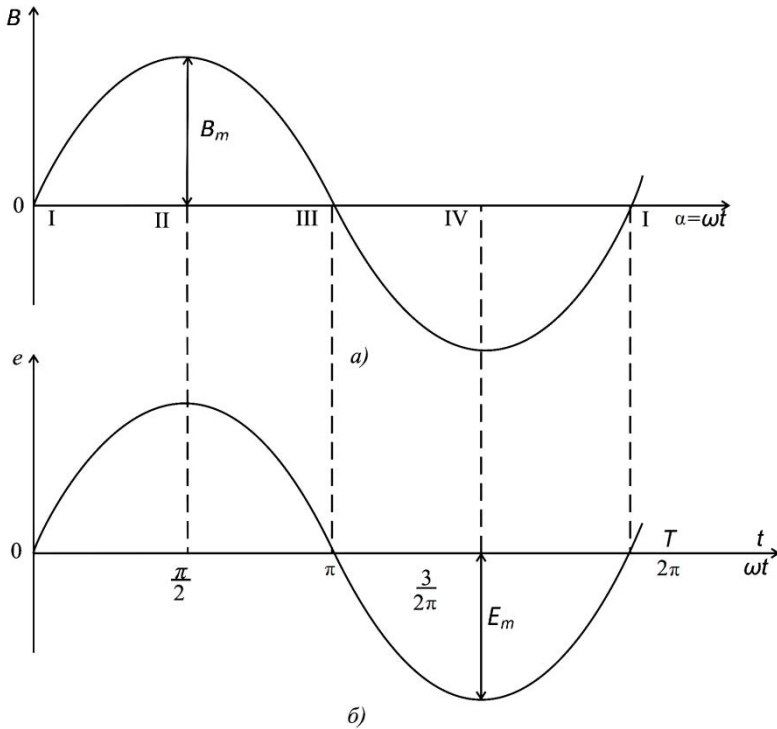


Рис. 1.3

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

Величину, обратную периоду, называют **циклической частотой**  $f = \frac{1}{T}$ .

Циклическая частота  $f$  измеряется в **герцах** (Гц). В России и странах Европы принята стандартная частота переменного тока  $f = 50 \text{ Гц}$ , которой соответствует период  $T = 0,02 \text{ с}$ .

Величину  $\omega = 2\pi f$  в электротехнике называют **угловой частотой**. Если  $f = 50 \text{ Гц}$ , то  $\omega = 2\pi \cdot 50 = 314 \text{ рад/с}$ .

## 2 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ О СИНУСОИДАЛЬНЫХ ЭДС, НАПРЯЖЕНИЯХ И ТОКАХ

Синусоидальные ЭДС, напряжения и токи обычно записывают выражениями:

$$e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi_e);$$

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u);$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Значения ЭДС  $e$ , напряжения  $u$  или тока  $i$  в любой данный момент времени принято называть **мгновенными значениями**, а их наибольшие значения  $E_m, U_m, I_m$  – **амплитудами**.

Аргументы синуса  $(\omega t + \psi_e)$ ,  $(\omega t + \psi_u)$ ,  $(\omega t + \psi_i)$  называют **фазами** соответственно ЭДС, напряжения и тока.

Величины  $\psi_e, \psi_u, \psi_i$ , равные значениям аргумента синуса при  $t = 0$ , называют **начальными фазами**.

Разность фаз двух синусоидальных величин, изменяющихся с одной и той же частотой, называют **сдвигом фаз**. Сдвиг фаз между **напряжением и током** на участке цепи обозначают буквой  $\varphi$ . Так, для двух синусоидальных функций времени

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u) \text{ и } i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$

сдвиг фаз по определению равен

$$\varphi = (\omega t + \psi_u) - (\omega t + \psi_i) = \psi_u - \psi_i.$$

Графические изображения функций времени называют **временными графиками**.

Временные графики для напряжения и тока изображены на рис. 2.1.

По оси абсцисс отложено время  $t$  или пропорциональная времени угловая величина  $\omega t$ .

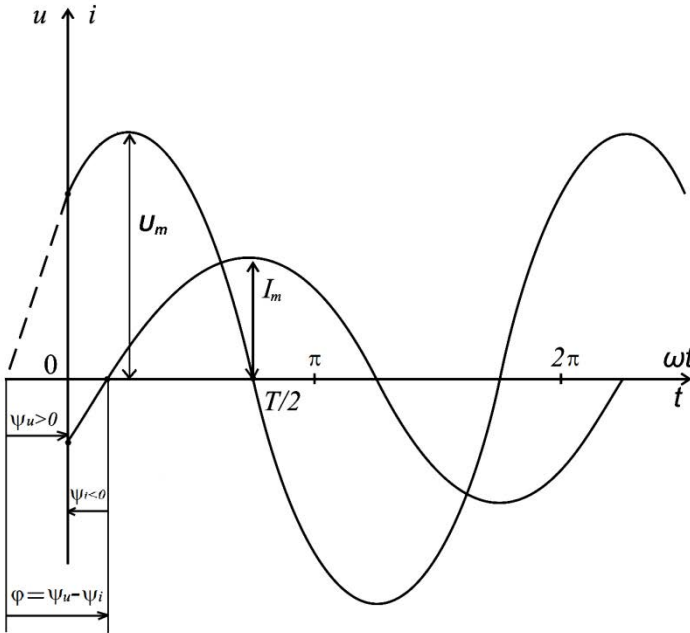


Рис. 2.1

Начальная фаза отсчитывается всегда от момента, соответствующего началу синусоиды, до момента начала отсчёта времени, т.е. до начала координат. Отметим, что при положительной начальной фазе ( $\psi_u > 0$ ) начало синусоиды сдвинуто влево, а при отрицательной начальной фазе ( $\psi_i < 0$ ) – вправо относительно начала координат.

Как видно из рисунка, для данного примера сдвиг фаз между напряжением и током

$$\varphi = \psi_u - \psi_i > 0.$$

В этом случае говорят, что напряжение опережает по фазе ток на угол  $\varphi$ .

Если  $\varphi < 0$ , то говорят, что напряжение запаздывает по фазе от тока на угол  $\varphi$ .

Если ток и напряжение имеют одинаковые начальные фазы, т.е.  $\varphi = 0$ , то говорят, что они совпадают по фазе.

Если сдвиг фаз  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ , то говорят, что напряжение и ток находятся в квадратуре.

### 3 ДЕЙСТВУЮЩИЕ И СРЕДНИЕ ЗНАЧЕНИЯ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ЭДС, НАПРЯЖЕНИЙ И ТОКОВ

Периодические ЭДС, напряжения и токи, помимо мгновенных и амплитудных значений, характеризуются среднеквадратичными или *действующими значениями*, которые определяются по формулам:

$$E = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T e^2 dt}, \quad U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2 dt}, \quad I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}.$$

Эти формулы могут быть получены сравнением переменного и постоянного токов по их энергетическому действию.

За один период  $T$  переменного тока в проводнике с сопротивлением  $R$  выделится тепловая энергия:

$$W_{\approx} = \int_0^T Ri^2 dt.$$

При протекании постоянного тока  $I$  по тому же сопротивлению  $R$  за то же время  $T$  выделится тепловая энергия:

$$W_{-} = RI^2T.$$

Приравняв значения выделенных тепловых энергий переменного и постоянного токов, получим возможность сравнить переменный и постоянный токи по энергетическому действию:

$$W_{\approx} = W_{-} = \int_0^T Ri^2 dt = RI^2T,$$

откуда

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}.$$

Следовательно, *действующее значение синусоидального тока численно равно такому постоянному току, который за то же время выделяет в том же сопротивлении одинаковое с переменным током количество тепловой энергии.*

Установим связь между действующим  $I$  и амплитудным значениями синусоидального тока  $i = I_m \sin \omega t$ .

Действующее значение синусоидального тока равно

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t \, dt} = I_m \sqrt{\frac{1}{2T} \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) \, dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 I_m.$$

Аналогично можно определить действующие значения синусоидальных ЭДС и напряжения:

$$E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 E_m; \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 U_m.$$

Обычно, говоря о значениях периодических ЭДС, напряжений и токов, подразумевают их действующие значения и для краткости говорят: «Значение напряжения столько–то вольт», «Значение тока столько–то ампер».

Действующие значения обозначают большими буквами без индексов, т.е. так же, как постоянные напряжения и токи.

Подавляющее большинство измерительных приборов переменного тока градуируется в действующих значениях. Действующими значениями пользуются и в расчётах электрических цепей при синусоидальном токе.

Среднее арифметическое значение синусоидальных ЭДС, напряжений и токов за период и за любое целое число периодов всегда равно нулю. Однако на практике представляет интерес их среднее значение за половину периода.

Под **средним значением** синусоидальных ЭДС, напряжений и токов понимают их средние значения за положительный полупериод:

$$E_{\bar{N}D} = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} E_m \sin \omega t \, dt = \frac{4E_m}{\omega T} = \frac{2E_m}{\pi}.$$

Аналогично можно определить:

$$U_{CP} = \frac{2U_m}{\pi}, \quad I_{CP} = \frac{2I_m}{\pi}.$$

#### 4 ИЗОБРАЖЕНИЕ СИНУСОИДАЛЬНЫХ ЭДС, НАПРЯЖЕНИЙ И ТОКОВ ВРАЩАЮЩИМИСЯ ВЕКТОРАМИ. ВЕКТОРНЫЕ ДИАГРАММЫ

Расчёт электрических цепей облегчается, если синусоидальные ЭДС, напряжения и токи, имеющие угловую частоту  $\omega$ , изображать векторами, вращающимися с той же угловой частотой.

Пусть некоторая ЭДС изменяется по синусоидальному закону

$$e = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$$

В прямоугольной системе координат  $MON$  (рис. 4.1) изобразим под углом  $\psi_e$  к оси  $OM$  вектор, длина которого в соответствующем масштабе равна амплитуде  $E_m$ . Положительную начальную фазу  $\psi_e$  будем отсчитывать от оси  $OM$  против, а отрицательную – по направлению движения часовой стрелки. Если теперь представить, что вектор  $E_m$  начал

вращаться против направления движения часовой стрелки вокруг начала координат с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , то через время  $t$  этот вектор повернётся от своего начального положения на угол  $\omega t$  и с осью  $OM$  составит угол  $\omega t + \psi_e$ . Тогда его проекция на вертикальную ось  $ON$  будет равна в выбранном масштабе мгновенному значению ЭДС в данный момент времени  $t$ .

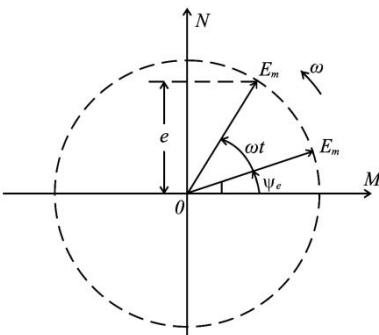


Рис. 4.1

Таким образом, между синусоидальной ЭДС и вращающимся вектором существует взаимно однозначная связь.

Длина такого вектора в выбранном масштабе равна амплитуде, угол вектора с горизонтальной осью равен фазе, а его проекция на вертикальную ось равна мгновенному значению изображаемой синусоидальной ЭДС.

Поэтому вращающиеся векторы называют **изображением** синусоидальных функций. Обычно говорят: «Вектор напряжения», «Вектор тока» и т.д. Надо иметь в виду, что эти векторы имеют совсем другой смысл, чем векторы, определяющие значения и направления физических величин в пространстве, например векторы скорости, силы, напряжённости электрического или магнитного поля и т.п. Вращающийся вектор не определяет направления величины в пространстве и является лишь удобным графическим изображением синусоидальной функции времени.

Совокупность векторов, изображающих рассматриваемые синусоидальные функции времени, называют **векторной диаграммой**. Векторные диаграммы обычно строят для начального момента времени, т.е. при  $t = 0$ .

На рис. 4.2 изображены временной график и соответствующая ему векторная диаграмма синусоидальных напряжения и тока.

В расчёте электрических цепей часто приходится проводить сложение или вычитание синусоидальных напряжений или токов одинаковой частоты, но с различными амплитудами и начальными фазами. Непосредственные аналитические вычисления связаны с громоздкими тригонометрическими преобразованиями. Такие задачи значительно проще решаются графически с помощью построения векторных диаграмм.

Найдём с помощью векторной диаграммы ток  $i$  в неразветвлённой части электрической цепи (рис. 4.3, а), который равен сумме двух синусоидальных токов одинаковой частоты:

$$i_1 = I_{m1} \sin(\omega t + \psi_1), \quad i_2 = I_{m2} \sin(\omega t + \psi_2).$$

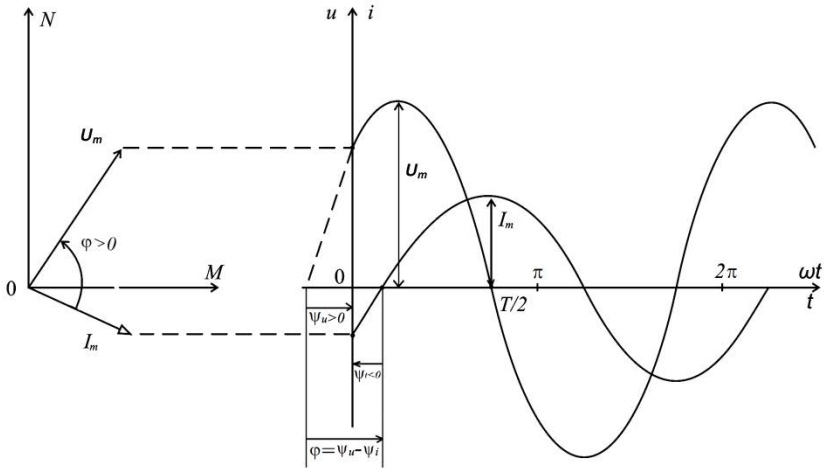


Рис. 4.2

Изобразим на векторной диаграмме (рис. 4.3, б) вращающиеся векторы токов  $i_1$  и  $i_2$  и графически определим их геометрическую сумму.

Так как проекция на любую ось геометрической суммы двух векторов равна алгебраической сумме проекций на ту же ось этих векторов, то проекция геометрической суммы векторов  $OA_1 + OA_2 = OA$  токов  $i_1$  и  $i_2$  на вертикальную ось и есть искомая сумма  $i_1 + i_2 = i$ , а вектор  $OA$  является её изображением, т.е. изображением тока  $i$ .

Определив из векторной диаграммы длину вектора  $OA$ , равную в выбранном масштабе  $I_m$ , и угол  $(\omega t + \psi_i)$  запишем выражение для искомого тока:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Этот способ можно применять для сложения или вычитания любого числа синусоидальных напряжений или токов одинаковой частоты.

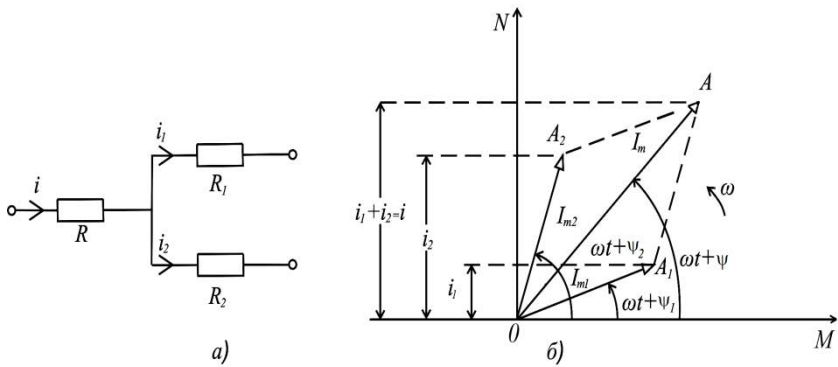


Рис. 4.3

При расчётах электрических цепей обычно определяют действующие значения синусоидальных величин и сдвиг фаз между напряжением и током. В этом случае положение осей можно выбирать произвольно или вообще оси не изображать, а длины векторов брать равными действующим значениям рассматриваемых величин.

## **5 ОСОБЕННОСТИ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА**

### **5.1 Особенности применения законов электрических цепей в цепях синусоидального тока**

В электрических цепях при воздействии переменных напряжений токи также являются переменными величинами. Так как электрический ток неразрывно связан с магнитным и электрическим полями, то при переменном токе эти поля изменяются во времени.

Переменное магнитное поле наводит в цепи ЭДС самоиндукции, а изменение электрического поля сопровождается появлением токов смещения. В проводниках электрическая энергия преобразуется в тепловую.

Каждый участок электрической цепи создаёт магнитное и электрическое поля и обладает свойством преобразовывать электрическую энергию в тепловую. Таким образом, любая электрическая цепь переменного тока является цепью с распределёнными параметрами. Однако для упрощения расчётов и исследования реальной электрической цепи её, как и цепь постоянного тока, заменяют цепью с сосредоточенными параметрами – сопротивлением  $R$ , учитывающим преобразование электрической энергии в тепловую, индуктивностью  $L$ , учитывающей энергию магнитного поля и явление самоиндукции, и ёмкостью  $C$ , учитывающей энергию электрического поля и ток смещения.

Расчёт электрических цепей при переменном токе, содержащих активное сопротивление индуктивность и ёмкость, имеет существенные отличия от расчёта цепей при постоянном токе.

Основными аналитическими соотношениями в расчёте цепей при переменном токе остаются законы Кирхгофа, применяемые к *мгновенным значениям* ЭДС, напряжений и токов.

Первый закон Кирхгофа формулируется следующим образом: *алгебраическая сумма мгновенных значений токов в узле электрической цепи равна нулю*, т.е.

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0.$$

Второй закон Кирхгофа формулируется следующим образом: *алгебраическая сумма мгновенных значений напряжений на элементах контура равна алгебраической сумме мгновенных значений ЭДС, входящих в этот контур*, т.е.

$$\sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^m e_k.$$

Применять первый и второй законы Кирхгофа для амплитудных или действующих значений ЭДС, напряжений и токов в цепях с индуктивностью и ёмкостью нельзя.

Закон Ома в таких цепях справедлив лишь в отдельных случаях и устанавливает связь, как правило, между действующими и амплитудными значениями тока и напряжения на отдельных элементах цепи или цепи в целом. Для мгновенных значений тока и напряжения закон Ома справедлив только для цепи с активным сопротивлением.

Непосредственное применение законов Кирхгофа для расчета цепей переменного тока приводит в общем случае к интегро–дифференциальным уравнениям, решение которых представляет определённые трудности. Поэтому для упрощения расчётов на основе законов Кирхгофа разработан ряд специальных приёмов, позволяющих обходиться без решения интегро–дифференциальных уравнений, которые будут рассмотрены ниже.

## 5.2 Понятие о поверхностном эффекте в проводниках

**Поверхностным эффектом** называют явления уменьшения плотности  $j$  электрического тока в проводнике по мере удаления от поверхности проводника, вызванное затуханием проникающего в проводник электромагнитного поля.

Действительно, условия прохождения по проводнику постоянного и переменного токов не одинаковы. Постоянный ток распределяется по всему сечению проводника равномерно, т.е. во всех точках его сечения (рис. 5.1, а) плотность тока  $j$  одинакова. Плотность переменного тока возрастает от оси проводника к его поверхности.

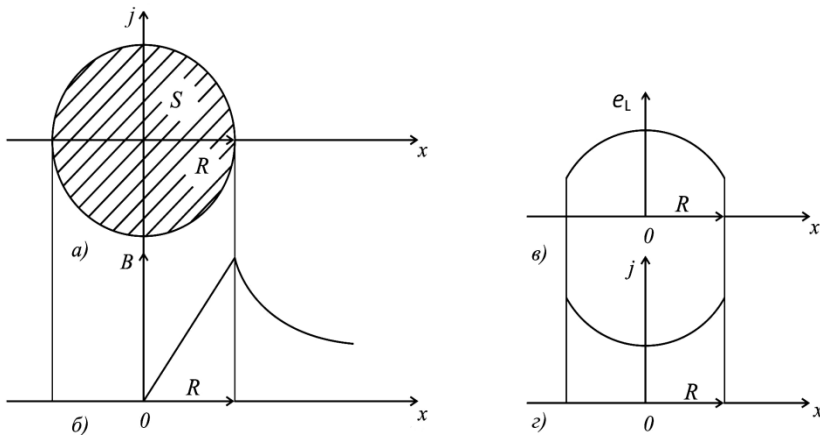


Рис. 5.1

Причиной возникновения поверхностного эффекта является неравномерное распределение магнитного поля по сечению проводника. Это приводит к тому, что внутренние слои проводника сцепляются с большим магнитным потоком (рис. 5.1, б). При переменном токе в проводнике вследствие явления электромагнитной индукции будут наводиться ЭДС самоиндукции, которые препятствуют прохождению тока. Чем ближе к оси проводника, тем больше эти ЭДС (рис. 5.1, в). В

результате плотность тока  $j$  в различных точках сечения проводника становится неодинаковой (рис. 5.1, з). Наименьшее значение она имеет на оси проводника, а наибольшее – на его поверхности.

Приближённо можно считать, что переменный ток в проводнике использует только часть его сечения  $S$ , поэтому вследствие явления поверхностного эффекта сопротивление переменному току, называемое **активным сопротивлением**, оказывается больше, чем сопротивление того же проводника постоянному току.

Поверхностный эффект проявляется тем сильнее, чем выше частота тока, больше диаметр провода, удельная проводимость и магнитная проницаемость материала провода. Это объясняется тем, что повышение частоты увеличивает наводимые в проводнике ЭДС самоиндукции, а повышение удельной проводимости – роль этих ЭДС. С ростом магнитной проницаемости возрастает магнитное поле внутри провода. Увеличение диаметра провода создаёт большую разность потокоцеплений на оси и поверхности проводника.

В медных и алюминиевых проводах небольшого диаметра при частоте тока, не превышающей нескольких сотен герц, влиянием поверхностного эффекта можно пренебречь.

## 6 ПРОСТЕЙШИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА

### 6.1 Цепь с резистивным элементом

Двухполюсный элемент цепи, в котором происходит необратимый процесс преобразования электрической энергии в тепловую, называется **резистивным** элементом, а его параметр – **активным сопротивлением** или **активной проводимостью**.

С помощью понятия «активное сопротивление» на схемах изображаются соединительные провода, нагревательные и осветительные приборы, внутренние сопротивления электрических машин и т.д. Часто для обеспечения определённого режима работы в цепь вводят специально изготовленные детали, обладающие активным сопротивлением. В этом случае они называются **резисторами**.

Резистивный элемент характеризуется **вольт–амперной характеристикой (ВАХ)**, представляющей зависимость напряжения  $u_R$  на его выводах от тока  $i_R$  в нём. Для линейного резистивного элемента зависимость  $u_R(i_R)$  представляет собой прямую линию (рис. 6.1, а). Обозначение таких элементов на схемах показано на рис. 6.1, б.

Вольт–амперная характеристика линейного активного сопротивления представляется законом Ома:

$$u_R = Ri_R \text{ или } i_R = Gu_R,$$

где  $R$  – активное сопротивление, Ом;

$G = \frac{1}{R}$  – активная проводимость, единицей которой является **сименс** (См).

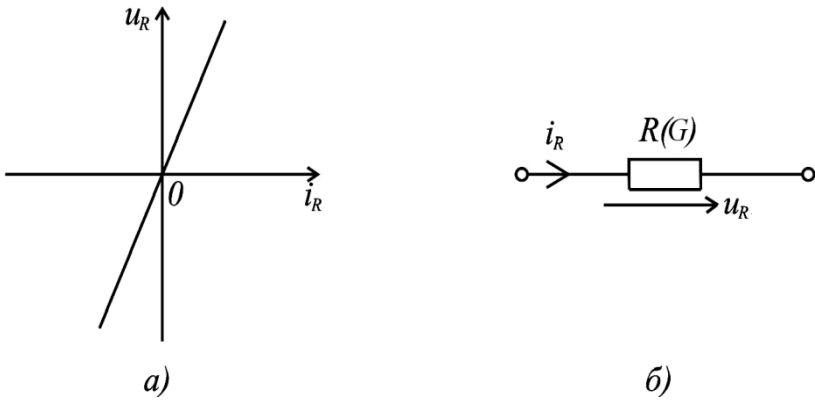


Рис. 6.1

Рассмотрим простейшую электрическую цепь, представленную на рис. 6.2, а, в которой потребитель энергии представляет собой чисто активное сопротивление  $R$ , а напряжение источника энергии изменяется по синусоидальному закону  $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$ , причём начальную фазу  $\psi_u$  будем считать равной нулю.

На основании второго закона Кирхгофа имеем

$$u - u_R = 0 \text{ или } u = u_R = Ri_R,$$

откуда

$$i_R = \frac{u_R}{R} = \frac{u}{R}.$$

После подстановки в выражение для тока значения напряжения  $u_R = u = U_{mR} \sin \omega t$  будем иметь:

$$i_R = \frac{U_{mR}}{R} \sin \omega t = I_{mR} \sin \omega t,$$

где  $I_{mR} = \frac{U_{mR}}{R}$  – амплитуда тока.

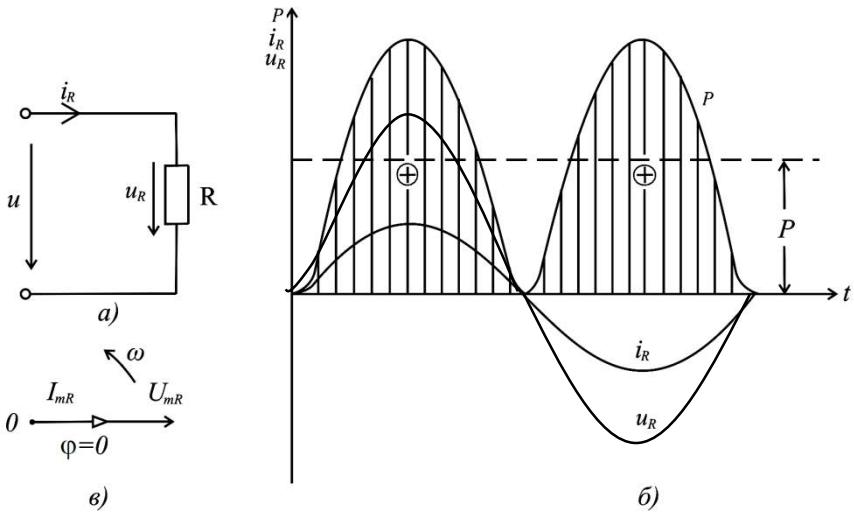


Рис. 6.2

Поделив правую и левую части последнего равенства на  $\sqrt{2}$ , получим соотношение для действующих значений:

$$I_R = \frac{U_R}{R}.$$

Из полученного выражения для тока  $i_R$  видно, что его фаза равна фазе напряжения  $u_R$ . Следовательно, в активном сопротивлении напряжение и ток совпадают по фазе (рис. 6.2, б), т.е. сдвиг фаз  $\varphi = 0$ . На векторной диаграмме (рис. 6.2, в) вектор тока  $I_{mR}$  совпадает по направлению с вектором напряжения  $U_{mR}$ .

Амплитудные и действующие значения напряжения и тока, так же как и мгновенные, связаны между собой законом Ома.

Энергия, поступающая от источника в цепь за время  $t$

$$W_R = \int_0^t R i_R^2 dt > 0, \quad \text{полностью преобразуется активным}$$

сопротивлением в тепловую энергию.

Скорость поступления энергии в цепь, равная производной от энергии по времени, есть мощность. Её мгновенное значение  $p$ , называемое мгновенной мощностью, равно

$$p = Ri_R^2 = u_R i_R.$$

Подстановка в выражение для мгновенной мощности значений напряжения и тока даёт

$$\begin{aligned} p &= u_R i_R = U_{mR} \sin \omega t I_{mR} \sin \omega t = U_{mR} I_{mR} \sin^2 \omega t = \\ &= U_{mR} I_{mR} \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} = \frac{U_{mR} I_{mR}}{2} - \frac{U_{mR} I_{mR}}{2} \cos 2\omega t = \\ &= U_R I_R - U_R I_R \cos 2\omega t, \end{aligned}$$

где  $U_R = \frac{U_{mR}}{\sqrt{2}}$  и  $I_R = \frac{I_{mR}}{\sqrt{2}}$  – действующие значения напряжения и тока.

Выражение для мгновенной мощности  $p$  показывает, что она имеет не зависящую от времени постоянную составляющую и переменную составляющую, изменяющуюся по косинусоиду двойной частоты  $2\omega$ . Временной график мгновенной мощности  $p$  изображён на рис. 6.2, б. Мгновенная мощность  $p$  равна нулю в те моменты времени, когда равны нулю напряжение и ток. В остальное время мгновенная мощность положительна, что указывает на безвозвратное потребление энергии активным сопротивлением.

Среднее значение мгновенной мощности  $p$  за период называют **активной мощностью** и обозначают буквой  $P$ . Из определения следует, что

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{1}{T} \int_0^T U_R I_R dt - \frac{1}{T} \int_0^T U_R I_R \cos 2\omega t dt = \\ &= U_R I_R = RI_R^2 = GU_R^2, \end{aligned}$$

т.е. активная мощность  $P$  равна постоянной составляющей мгновенной мощности. Активная мощность определяет энергию,

потребляемую активным сопротивлением в единицу времени. Единицей активной мощности является **ватт** (Вт).

## 6.2 Цепь с индуктивным элементом

Двухполюсный элемент, способный на участке цепи создавать магнитное поле и накапливать энергию в виде энергии магнитного поля, называется **индуктивным элементом**.

Индуктивный элемент характеризуется зависимостью потокосцепления  $\psi$  от тока  $i_L$ , называемой **вебер-амперной характеристикой**. Для линейного индуктивного элемента потокосцепление линейно зависит от тока (рис. 6.3, а)

$$\psi = Li_L.$$

Величину  $L = \frac{\psi}{i_L}$  называют **коэффициентом**

**самоиндукции** или просто **индуктивностью**. Она является параметром индуктивного элемента и позволяет количественно учитывать способность участка цепи создавать магнитное поле с определённой энергией. Единицей индуктивности является **генри** (Гн). Обозначение линейной индуктивности на схемах показано на рис. 6.3, б.

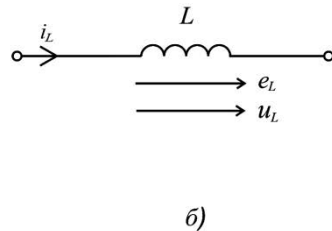
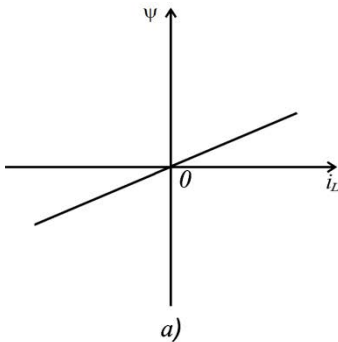


Рис. 6.3

С помощью понятия «индуктивность» на схемах изображаются катушки индуктивности, дроссели, обмотки электрических машин, трансформаторов, реле и т.д.

Для создания на участке цепи определенной индуктивности вводят специально изготовленные детали, обладающие индуктивностью – **индуктивные катушки**. Такие катушки по устройству представляют собой диэлектрический или ферромагнитный сердечник с некоторым числом витков, как правило, медного провода.

Рассмотрим цепь с индуктивностью  $L$ , представленную на рис. 6.4, а, при воздействии на неё синусоидального тока  $i_L = I_{mL} \sin(\omega t + \psi_i)$ , при  $\psi_i = 0$ . Найдём закон изменения напряжения и основные соотношения для этой цепи.

В индуктивности  $L$  при изменении тока возникает ЭДС самоиндукции  $e_L$ , пропорциональная скорости изменения тока  $(\frac{di_L}{dt})$ . Согласно закону электромагнитной индукции эта ЭДС противодействует изменению тока. Поэтому для одинаково выбранных положительных направлений тока и ЭДС знаки  $e_L$  и  $\frac{di_L}{dt}$  всегда противоположны, т.е.  $e_L = -L \frac{di_L}{dt}$ .

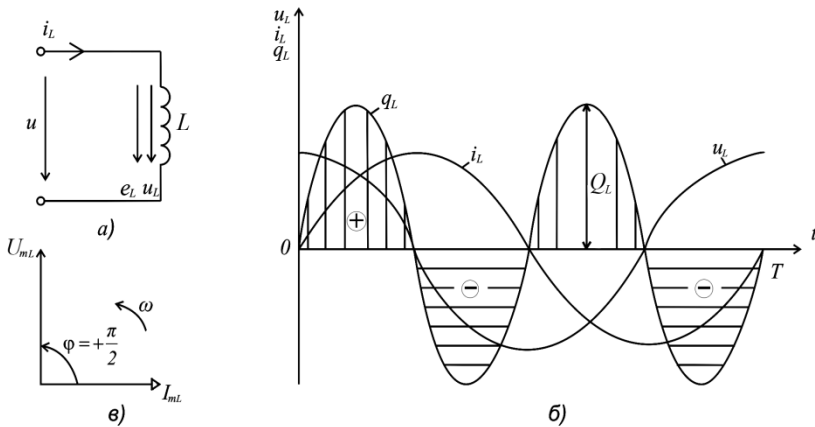


Рис. 6.4

На основании второго закона Кирхгофа для этой цепи можно записать

$$u_L - u = 0 \quad \text{или} \quad e_L = -u,$$

откуда

$$u = u_L = -e_L = L \frac{di_L}{dt}.$$

При заданном токе  $i_L$  напряжение на индуктивности будет

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = \omega L I_{mL} \cos \omega t = U_{mL} \sin \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right),$$

где  $U_{mL} = \omega L I_{mL}$  - амплитуда напряжения.

В формулу, определяющую амплитуду напряжения, входит величина  $\omega L$ , имеющая размерность сопротивления и называемая **индуктивным сопротивлением**.

Индуктивное сопротивление  $X_L = \omega L = 2\pi fL$  пропорционально индуктивности  $L$  и частоте  $f$ . При постоянном токе ( $f=0$ ) явление самоиндукции отсутствует и  $X_L = \omega L = 2\pi fL = 0$ .

Разделив на  $\sqrt{2}$  правую и левую части выражения для амплитуды напряжения, получим формулу для определения действующего значения напряжения на индуктивности:

$$U_L = \omega L I_L = X_L I_L.$$

Из выражения для напряжения  $u_L$  следует, что его начальная фаза  $\psi_u = +\frac{\pi}{2}$ , а сдвиг фаз  $\varphi = \psi_u - \psi_i$  также равен  $+\frac{\pi}{2}$ .

Это означает, что в индуктивности напряжение опережает ток на угол  $\frac{\pi}{2}$ .

Векторная диаграмма и временные графики для напряжения и тока в индуктивности изображены на рис. 6.4, б, в.

Энергия, накопленная в магнитном поле индуктивности  $L$ , определяется выражением  $W_L = \frac{Li_L^2}{2}$ , а мгновенная мощность

$$q_L = \frac{d}{dt} \left( \frac{Li_L^2}{2} \right) = L \frac{di_L}{dt} i_L = u_L i_L.$$

Подставив в это выражение значения напряжения и тока, получим

$$\begin{aligned} q_L &= U_{mL} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) I_{mL} \sin \omega t = U_{mL} I_{mL} \sin \omega t \cos \omega t = \\ &= \frac{U_{mL} I_{mL}}{2} \sin 2\omega t = U_L I_L \sin 2\omega t = X_L I_L^2 \sin 2\omega t. \end{aligned}$$

Мгновенная мощность  $q_L$  изменяется по синусоидальному закону с удвоенной частотой  $2\omega$ , относительно частоты напряжения или тока и приобретает как положительные, так и отрицательные значения (рис. 6.4, б).

Энергия  $\frac{Li_L^2}{2}$  магнитного поля индуктивности увеличивается по мере возрастания абсолютного значения тока до своего наибольшего значения, равного  $\frac{LI_{mL}^2}{2}$ . При этом мгновенная мощность положительна, что говорит о поступлении энергии в индуктивность от источника. С уменьшением абсолютного значения тока начинает уменьшаться и энергия магнитного поля, а мгновенная мощность меняет знак и становится отрицательной. Это означает, что энергия, накопленная в магнитном поле индуктивности, возвращается источнику энергии.

Среднее значение мгновенной мощности за период, или активная мощность  $P$ , для чисто индуктивной цепи равна:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T q_L dt = 0,$$

т.е. происходит полный обмен энергией без потерь между источником энергии и индуктивностью.

Амплитудное значение мгновенной мощности  $q_L$

$$Q_L = X_L I_L^2$$

называется **индуктивной (реактивной) мощностью**.

Размерность реактивной и активной мощностей одинаковая, однако единицу измерения реактивной мощности принято называть **вольт–ампер реактивный (вар)**.

### 6.3 Цепь с емкостным элементом

Двухполюсный элемент, способный на участке цепи создавать электрическое поле и накапливать энергию в виде энергии электрического поля, называется **емкостным элементом**.

Емкостной элемент характеризуется зависимостью заряда  $q$  от напряжения  $u_C$ , называемой **кулон–вольтной характеристикой**.

Для линейного емкостного элемента заряд  $q$  линейно зависит от напряжения (рис. 6.5, а)

$$q = C u_C.$$

Коэффициент пропорциональности  $C$  в этом выражении, являющийся параметром емкостного элемента, называют **ёмкостью**.

Единицей ёмкости является **фарад (Ф)**. Обозначение линейной ёмкости на схемах показано на рис. 6.5, б.

С помощью понятия «ёмкость» изображаются те участки цепи, на которых создаётся электрическое поле. Для создания определённой ёмкости в цепь вводят специально изготовленные детали – **конденсаторы**.

Рассмотрим цепь с ёмкостью  $C$ , представленную на рис. 6.6, а, при воздействии на неё синусоидального напряжения  $u = U_m \sin(\omega t + \psi_u)$  при  $\psi_u = 0$ . Найдём закон изменения тока и основные соотношения для этой цепи.

При переменном во времени напряжении, приложенном к ёмкости, на её электродах происходит непрерывный прирост или убыль электрических зарядов, т.е. в цепи возникает переменный

во времени ток. Такой же по значению ток смещения возникает в диэлектрике между электродами под действием переменного электрического поля.

Известно, что ток в цепи с ёмкостью равен скорости изменения её заряда. Для выбранных на рис. 6.6, а направлений напряжения  $u_C$  и тока  $i_C$  знак тока совпадёт со знаком производной от заряда.

Действительно, приросту заряда ( $\frac{dq}{dt} > 0$ ) соответствует положительное значение тока, убыли заряда ( $\frac{dq}{dt} < 0$ ) – отрицательное значение тока. Тогда, принимая во внимание, что  $q = Cu_C$ , можно записать

$$i_C = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}, \quad u_C = \frac{1}{C} \int i_C dt.$$

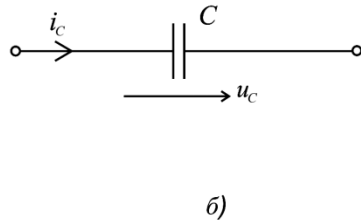
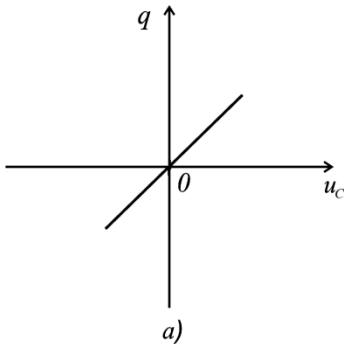


Рис. 6.5

На основании второго закона Кирхгофа для рассматриваемой цепи имеем

$$u - u_C = 0 \quad \text{или} \quad u = u_C.$$

Подставив в выражение для тока значение напряжения  $u_C = u = U_{mC} \sin \omega t$ , получим

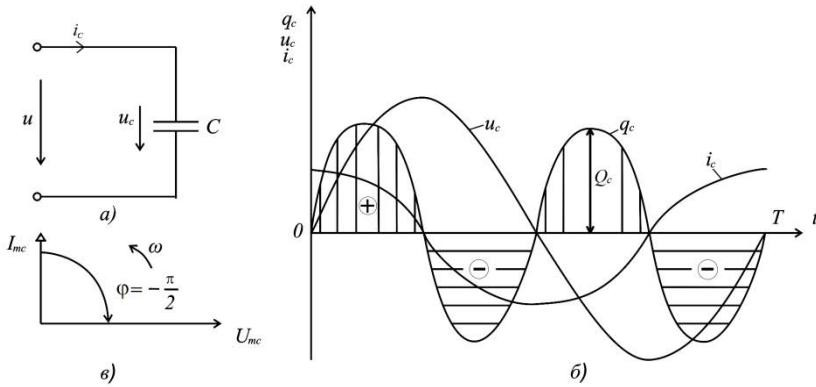


Рис. 6.6

$$i_c = C \frac{du_c}{dt} = \omega C U_{mC} \cos \omega t = I_{mC} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}),$$

где  $I_{mC} = \omega C U_{mC} = \frac{U_{mC}}{1/\omega C}$  – амплитудное значение тока.

В формулу, определяющую амплитуду тока входит величина  $1/\omega C$ , имеющая размерность сопротивления и называемая **ёмкостным сопротивлением**.

Ёмкостное сопротивление

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C},$$

обратно пропорционально ёмкости  $C$  и частоте  $f$ . При постоянном токе ( $\omega = 0$ )

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \infty.$$

Разделив на  $\sqrt{2}$  левую и правую части выражения для амплитуды тока, получим формулу для определения действующего значения тока в ёмкости

$$I_C = \frac{U_C}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{U_C}{X_C}.$$

Из выражения для тока  $i_C$  следует, что в цепи с ёмкостью его начальная фаза

$$\psi_i = +\frac{\pi}{2}, \text{ а сдвиг фаз } \varphi = \psi_u - \psi_i = -\frac{\pi}{2}.$$

Это значит, что в ёмкости ток опережает напряжение на угол  $\frac{\pi}{2}$ .

Векторная диаграмма и временной график для тока и напряжения на емкости показаны на рис. 6.6, в, б.

Энергия, накопленная в электрическом поле ёмкости  $C$ , определяется выражением  $W_C = \frac{Cu_C^2}{2}$ , а мгновенная мощность

$$q_C = \frac{d}{dt}\left(\frac{Cu_C^2}{2}\right) = u_C C \frac{du_C}{dt} = u_C i_C.$$

Подставив в это выражение значения напряжения и тока, получим

$$\begin{aligned} q_C &= U_{mC} \sin \omega t I_{mC} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = U_{mC} I_{mC} \sin \omega t \cos \omega t = \\ &= U_{mC} I_{mC} \frac{\sin 2\omega t}{2} = U_C I_C \sin 2\omega t = X_C I_C^2 \sin 2\omega t. \end{aligned}$$

Мгновенная мощность  $q_C$  изменяется по синусоидальному закону с удвоенной частотой  $2\omega$  и приобретает как положительные, так и отрицательные значения (рис. 6.6, б).

Энергия  $\frac{Cu_C^2}{2}$  электрического поля ёмкости увеличивается по мере возрастания абсолютного значения напряжения до своего наибольшего значения, равного  $\frac{CU_{mC}^2}{2}$ . При этом мгновенная мощность положительна, т.е. энергия поступает в ёмкость от источника. Как только напряжение начинает уменьшаться, уменьшается и энергия электрического поля, а мощность

становится отрицательной. Следовательно, энергия, накопленная в электрическом поле ёмкости, возвращается источнику энергии.

Среднее значение мгновенной мощности за период, или активная мощность  $P$  для чисто ёмкостной цепи равна:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T q_C dt = 0,$$

т.е. происходит полный обмен энергией без потерь между источником энергии и емкостью.

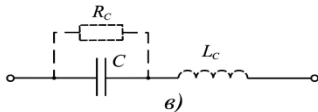
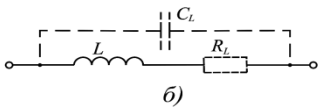
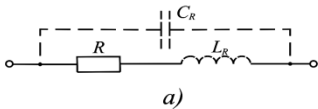
Амплитудное значение мгновенной мощности  $q_C$

$$Q_C = X_C I_C^2$$

называется **ёмкостной (реактивной) мощностью** и измеряется, как и индуктивная мощность, в **вар**.

## 6.4 Схемы замещения резисторов, катушек индуктивности и конденсаторов

Идеализированные схемные элементы – сопротивление  $R$ , индуктивность  $L$  и ёмкость  $C$  отражают основные свойства и параметры (соответственно резисторов, индуктивных катушек и конденсаторов), связанные с процессами необратимого рассеяния и обратимого накопления энергии.



Однако на практике часто необходимо учитывать, кроме основных, дополнительные свойства и параметры реальных элементов, обусловленные побочными (паразитными) процессами и их конкретным устройством.

Рис. 6.7

Например, при высоких частотах усиливается влияние паразитных индуктивности  $L_R$  и ёмкости  $C_R$  резистора, которыми при низких частотах можно пренебречь. У

катушки индуктивности в ряде случаев требуется учитывать сопротивление  $R_L$  провода, потери энергии в сердечнике и межвитковую ёмкость  $C_L$ , а у конденсатора – потери энергии в диэлектрике, ток утечки, а также индуктивность  $L_C$  выводов и обкладок.

С помощью идеализированных схемных элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$  можно составить схемы замещения резисторов, индуктивных катушек и конденсаторов, учитывающие основные побочные процессы.

На рис. 6.7, *а* показана схема замещения резистора с учётом его индуктивности и ёмкости, а на рис. 6.7, *б*, *в* – схемы замещения катушки индуктивности и конденсатора, учитывающие потери энергии и токи утечки, паразитные индуктивности и ёмкости. Параметры таких схем замещения находят на основании экспериментальных данных или расчётным путём.

## 7 ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМ СОЕДИНЕНИЕМ АКТИВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ, ИНДУКТИВНОСТИ И ЁМКОСТИ

### 7.1 Основные соотношения между током и напряжениями

Рассмотрим цепь с последовательным соединением активного сопротивления  $R$ , индуктивности  $L$  и ёмкости  $C$ , изображённую на рис. 7.1, а, в которой протекает ток,  $i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$ , причём  $\psi_i = 0$

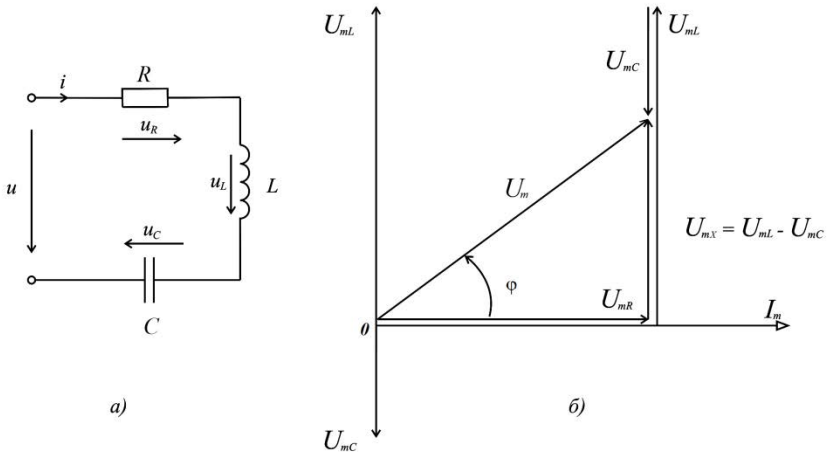


Рис. 7.1

В этой цепи удобно считать заданным ток, так как он при последовательном соединении одинаков во всех элементах.

При известных  $R$ ,  $L$  и  $C$  найдём напряжения на элементах и напряжение, приложенное ко всей цепи.

На основании второго закона Кирхгофа для мгновенных значений имеем

$$u = u_R + u_L + u_C = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt.$$

Зная ток, определим напряжения на элементах цепи:

$$u_R = RI_m \sin \omega t = U_{mR} \sin \omega t;$$

$$u_L = X_L I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = U_{mL} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2});$$

$$u_C = X_C I_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = U_{mC} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}),$$

где  $U_{mR} = RI_m$ ,  $U_{mL} = X_L I_m$  и  $U_{mC} = X_C I_m$  – амплитуды напряжений.

Для действующих значений эти соотношения будут иметь вид:

$$U_R = RI; \quad U_L = X_L I; \quad U_C = X_C I.$$

Напряжение, приложенное к цепи

$$u = U_{mR} \sin \omega t + U_{mL} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) + U_{mC} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}),$$

состоит из суммы трёх синусоид и, следовательно, также будет синусоидальным:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

Таким образом, для определения мгновенного значения напряжения необходимо найти его амплитуду  $U_m$  и начальную фазу  $\psi_u$ . Эти величины можно определить путём математических преобразований суммы трёх синусоид. Однако удобнее решить задачу с помощью построения векторной диаграммы, изобразив напряжения на элементах вращающимися векторами. Тогда их геометрическая сумма и будет вектором, изображающим напряжение всей цепи.

Это построение сделано на рис. 7.1, б, для момента времени  $t = 0$ .

Построение векторной диаграммы для цепи последовательного соединения элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$  начинают с

вектора тока  $I_m$ , откладывая его по горизонтальной оси (если  $\psi_i = 0$ ), либо под углом  $\psi_i$  к горизонтальной оси (если  $\psi_i \neq 0$ ).

Напряжение на активном сопротивлении совпадает по фазе с током и, следовательно, его вектор  $U_{mR}$  совпадает по направлению с вектором тока  $I_m$ . Напряжение на индуктивности

опережает по фазе ток на угол  $\frac{\pi}{2}$  и его вектор  $U_{mL}$  сдвинут относительно вектора тока в направлении вращения на тот же угол. Напряжение на ёмкости запаздывает по фазе от тока на угол  $\frac{\pi}{2}$  и его вектор  $U_{mC}$  противоположен по фазе вектору  $U_{mL}$ .

Складывая геометрически векторы напряжений  $U_{mR}$ ,  $U_{mL}$  и  $U_{mC}$  получим вектор  $U_m$  напряжения всей цепи.

В результате сложения векторов получается прямоугольный **треугольник напряжений** с гипотенузой, равной амплитуде  $U_m$  напряжения всей цепи, катетами  $U_{mR}$  и  $U_{mX} = U_{mL} - U_{mC}$ .

Напряжение  $U_{mX}$  называется **реактивным**.

Из треугольника напряжений следует, что

$$\begin{aligned} U_m &= \sqrt{U_{mR}^2 + (U_{mL} - U_{mC})^2} = \sqrt{(RI_m)^2 + (X_L I_m - X_C I_m)^2} = \\ &= I_m \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = I_m \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}. \end{aligned}$$

Сопротивление  $(X_L - X_C)$  называется **реактивным** и обозначается буквой  $X$ . Величина  $\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{R^2 + X^2} = z$  имеет размерность сопротивления и называется **полным сопротивлением** цепи.

Отметим, что реактивное сопротивление  $X = X_L - X_C$  является величиной алгебраической и может быть как больше, так и меньше нуля. Полное сопротивление  $z$  в общем случае больше

активного сопротивления  $R$  и может быть равно ему только в частном случае, при равенстве нулю реактивного сопротивления.

С учётом принятых обозначений

$$U_m = zI_m; \quad I_m = \frac{U_m}{z}; \quad z = \frac{U_m}{I_m},$$

а для действующих значений

$$U = zI; \quad I = \frac{U}{z}; \quad z = \frac{U}{I}.$$

Полученные выражения могут рассматриваться как аналоги закона Ома цепей синусоидального тока для амплитудных и действующих значений напряжений и токов. Для мгновенных значений напряжения и тока закон Ома неприменим. Написать

$i = \frac{u}{z}$  было бы грубой ошибкой, так как мгновенные значения напряжения и тока не находятся в линейной зависимости.

Сдвиг фаз на векторной диаграмме между векторами  $I_m$  и  $U_m$  определяется выражениями:

$$\begin{aligned} \varphi &= \operatorname{arctg} \frac{U_{mX}}{U_{mR}} = \operatorname{arctg} \frac{U_X}{U_R} = \operatorname{arctg} \frac{U_L - U_C}{U_R} = \operatorname{arctg} \frac{X_L - X_C}{R} = \\ &= \operatorname{arctg} \frac{X}{R} = \operatorname{arctg} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \end{aligned}$$

Из этих выражений видно, что значение и знак сдвига фаз  $\varphi$  определяется параметрами цепи  $R$ ,  $L$ ,  $C$  и частотой  $\omega$ .

Значение сдвига фаз лежит в пределах от  $-\frac{\pi}{2}$  до  $+\frac{\pi}{2}$ . Знак

сдвига фаз зависит от соотношения индуктивного и емкостного сопротивлений. При  $X_L > X_C$ ,  $X = X_L - X_C > 0$  и

$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X}{R} > 0$  (напряжение опережает по фазе ток). При

$X_L < X_C$ ,  $X < 0$  и  $\varphi < 0$  (напряжение запаздывает по фазе от тока). Если  $X_L = X_C$ , то  $X = 0$ ,  $z = R$  и  $\varphi = 0$  (напряжение

совпадает по фазе с током). Этот случай, называемый **резонансом напряжений**, рассмотрен ниже.

На рис. 7.2 изображены векторные диаграммы для трёх возможных соотношений  $X_L$  и  $X_C$ .

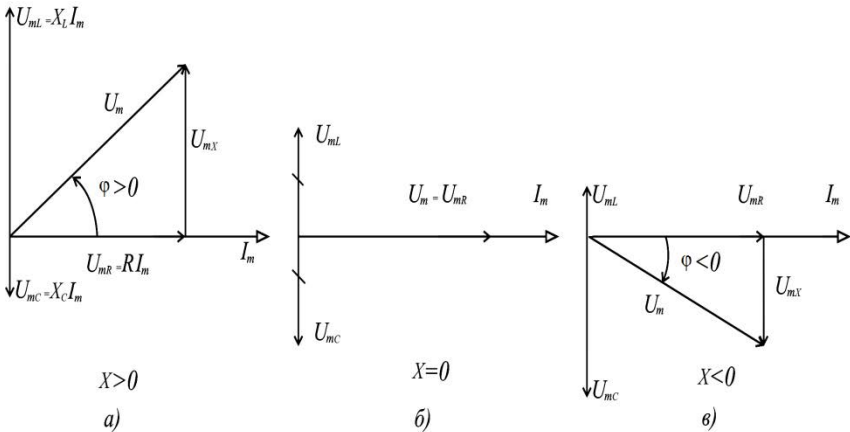


Рис. 7.2

Начальная фаза напряжения всей цепи определится из соотношения

$$\varphi = \psi_u - \psi_i.$$

Так как начальная фаза тока принята равной нулю, то  $\psi_u = \varphi$ .

Таким образом, все величины, необходимые для определения мгновенного значения напряжения всей цепи найдены и можно записать:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u) = U_m \sin(\omega t + \varphi).$$

Если все стороны треугольника напряжений для амплитудных значений поделить вначале на  $\sqrt{2}$ , а затем на действующее значение тока  $I$ , то получим подобный ему треугольник напряжений для действующих значений и треугольник сопротивлений, представленные на рис. 7.3.

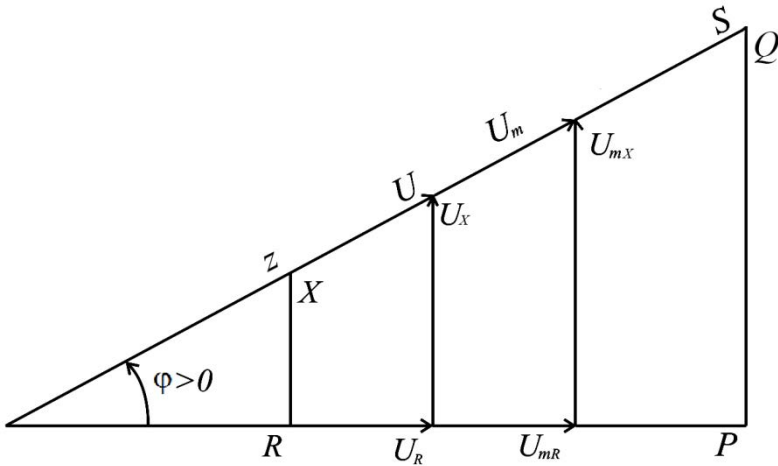


Рис. 7.3

Из этих треугольников следует, что  
 $U_R = U \cos \varphi$ ,  $U_X = U \sin \varphi$ ,  $R = z \cos \varphi$  и  $X = z \sin \varphi$ .

Очевидны и ранее полученные соотношения

$$z = \sqrt{R^2 + X^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{X}{R}.$$

## 7.2 Мощности цепи

Мгновенная мощность  $s$  всей цепи с последовательным соединением активного сопротивления  $R$ , индуктивности  $L$  и ёмкости  $C$  определяется из выражения

$$s = p + q_L + q_C = u_R i + u_L i + u_C i = (u_R + u_L + u_C) i = u i.$$

Рассмотрим отдельно мгновенные мощности элементов.

Мгновенная мощность активного сопротивления

$$\begin{aligned} p = u_R i &= U_{mR} I_m \sin^2 \omega t = \frac{U_{mR} I_m}{2} (1 - \cos 2\omega t) = \\ &= UI \cos \varphi - UI \cos \varphi \cos 2\omega t. \end{aligned}$$

Эта мощность имеет постоянную составляющую  $UI \cos \varphi$  и переменную составляющую – косинусоиду с такой же амплитудой, но двойной частоты  $2\omega$ .

Мгновенная мощность индуктивности

$$\begin{aligned} q_L &= U_{mL} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) I_m \sin \omega t = X_L I_m^2 \sin \omega t \cos \omega t = \\ &= X_L I^2 \sin 2\omega t = U_L I \sin 2\omega t = Q_L \sin 2\omega t. \end{aligned}$$

Мгновенная мощность ёмкости

$$\begin{aligned} q_C &= U_{mC} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) I_m \sin \omega t = -X_C I_m^2 \sin \omega t \cos \omega t = \\ &= -X_C I^2 \sin 2\omega t = -U_C I \sin 2\omega t = -Q_C \sin 2\omega t. \end{aligned}$$

Эти мощности изменяются по синусоидам двойной частоты, но противоположны по фазе, т.е. когда индуктивность получает энергию, ёмкость её отдает, и наоборот. В сумме они дают мгновенную реактивную мощность

$$\begin{aligned} q &= q_L + q_C = X_L I^2 \sin 2\omega t - X_C I^2 \sin 2\omega t = (X_L - X_C) I^2 \sin 2\omega t = \\ &= XI^2 \sin 2\omega t = U_X I \sin 2\omega t = UI \sin \varphi \sin 2\omega t. \end{aligned}$$

Амплитуда синусоиды реактивной мощности  $Q = XI^2 = U_X I = UI \sin \varphi$  называется **реактивной мощностью**.

Выражение для мгновенной мощности всей цепи может быть записано следующим образом:

$$\begin{aligned} s &= p + q_L + q_C = p + q = UI \cos \varphi - UI \cos \varphi \cos 2\omega t + \\ &+ UI \sin \varphi \sin 2\omega t = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi). \end{aligned}$$

Мгновенная мощность всей цепи имеет постоянную составляющую  $UI \cos \varphi$  и переменную составляющую – косинусоиду двойной частоты с амплитудой  $UI$ .

Временные диаграммы тока  $i$ , напряжения  $u$ , мгновенных мощностей  $s, p, q_L, q_C$  и  $q$  изображены на рис. 7.4, а, б, а на рис. 7.5 стрелками показаны направления движения энергии в различные интервалы времени.

Рассмотрим более подробно энергетический процесс в цепи с последовательным соединением  $R, L$  и  $C$ .

Из графика, показанного на рис. 7.4, *a*, видно, что мгновенная мощность равна нулю в те моменты времени, когда  $u = 0$  или  $i = 0$ . При одинаковых знаках напряжения  $u$  и тока  $i$  мгновенная мощность  $s > 0$ , что соответствует поступлению энергии в цепь. При различных знаках  $u$  и  $i$  мгновенная мощность  $s < 0$ , и в эти моменты времени цепь часть энергии возвращает источнику.

В интервале времени от 0 до  $t_1$  (рис. 7.4) мгновенная мощность  $s > 0$  и энергия от источника поступает в цепь. Часть этой энергии безвозвратно потребляется активным сопротивлением ( $p$  всегда больше нуля). Мгновенная мощность ёмкости в этом интервале времени отрицательна и, следовательно, энергия, запасённая ранее в электрическом поле конденсатора, возвращается в цепь и переходит в энергию магнитного поля индуктивности.

В рассматриваемом частном случае  $X_L > X_C$  и  $q_L > q_C$ , поэтому ёмкость снабжает энергией индуктивность только частично, а недостающая энергия поступает в индуктивность от источника, питающего цепь.

Таким образом, в интервале времени от 0 до  $t_1$  источник поставляет энергию в сопротивление  $R$ , где она преобразуется в тепловую энергию, и совместно с ёмкостью  $C$  в индуктивность  $L$ , что представлено на рис. 7.5, *a*.

В интервале времени от  $t_1$  до  $t_2$  ток  $i$  убывает и энергия, запасённая в магнитном поле индуктивности, частично превращается в тепловую энергию в сопротивлении  $R$  и частично переходит в энергию электрического поля ёмкости ( $q_C > 0$ ). Мгновенная мощность  $s$  в этом интервале по-прежнему больше нуля и энергия от источника поступает в цепь, где вместе с индуктивностью покрывает тепловые потери в сопротивлении  $R$  (рис. 7.5).

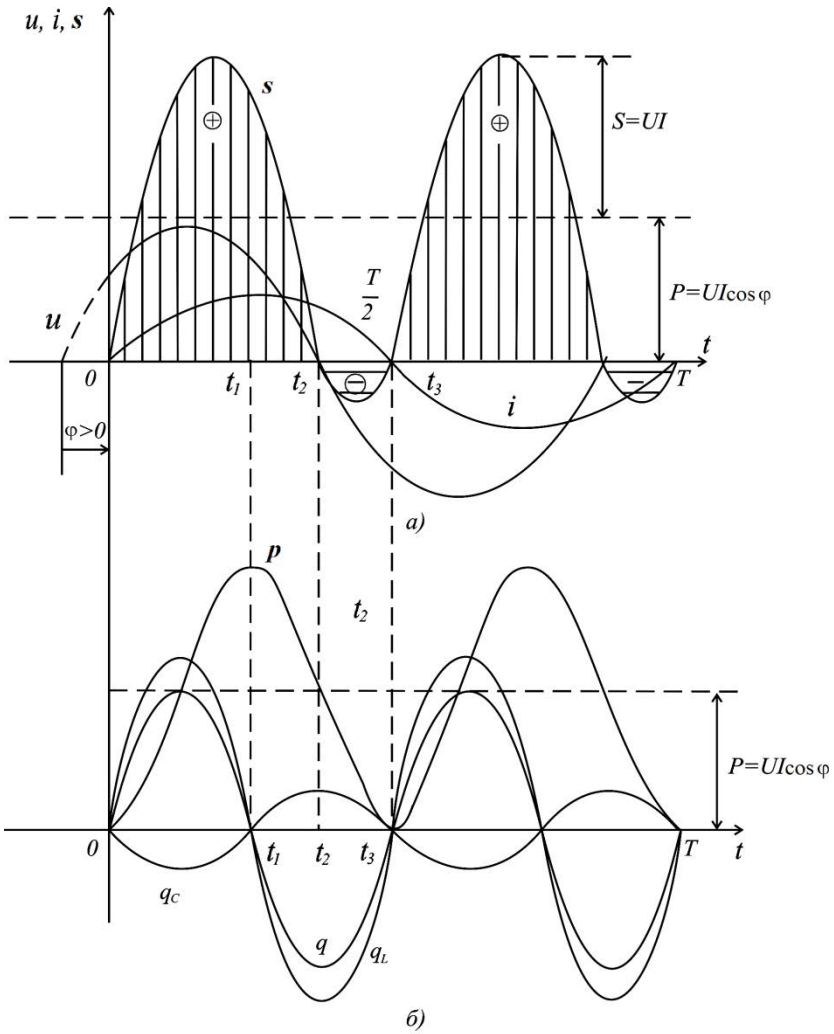


Рис. 7.4

В интервале времени от  $t_2$  до  $t_3$  энергия магнитного поля индуктивности продолжает поступать в ёмкость, заряжая её, полностью покрывает тепловые потери в сопротивлении  $R$ , а

избыток этой энергии возвращается источнику ( $s < 0$ ), (рис. 7.5, в).

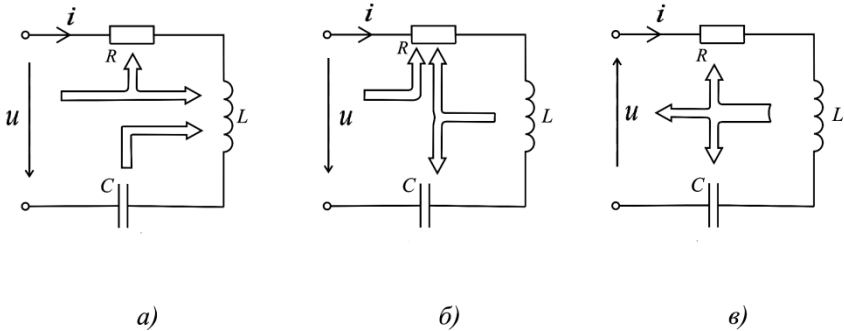


Рис. 7.5

В рассмотренном интервале времени от 0 до  $t_3$ , равном половине периода тока, завершается полный цикл колебаний энергии, после чего процесс повторяется.

Среднее значение мгновенной мощности  $s$  за период, или активная мощность равна

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T s \, dt = \frac{UI}{T} \int_0^T (\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)) \, dt = UI \cos \varphi.$$

Величину  $UI$ , равную амплитуде переменной составляющей мгновенной мощности  $s$ , называют **полной мощностью** и обозначают буквой  $S$ . Полная мощность  $S$  больше активной мощности. Активная мощность  $P$  становится равной полной мощности  $S$ , когда сдвиг фаз между напряжением и током  $\varphi = 0$ , т.е.  $\cos \varphi = 1$ .

Единицу измерения полной мощности, имеющую одинаковую размерность с активной мощностью, принято называть **вольт-ампер** (В·А).

Полная  $S = UI$ , активная  $P = UI \cos \varphi$  и реактивная  $Q = UI \sin \varphi$  мощности связаны зависимостью  $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$  и

образуют треугольник мощностей, подобный треугольникам напряжений и сопротивлений, представленный на рис. 7.3.

С учётом известных соотношений

$$U = zI; U \cos \varphi = U_R = RI; U \sin \varphi = U_X = XI,$$

выражения для мощностей будут иметь вид:

$$S = UI = zI^2;$$

$$P = UI \cos \varphi = U_R I = RI^2;$$

$$Q = UI \sin \varphi = U_X I = XI^2.$$

Отсюда следует, что треугольник мощностей можно получить из треугольника сопротивлений, умножив все его стороны на  $I^2$ .

Понятия полной, активной и реактивной мощностей распространяются на все электротехнические устройства (электрические цепи с любым соединением элементов, электрические машины, трансформаторы и др.).

Однако необходимо отметить, что только активная мощность  $P$  определяет энергию, поступающую в цепь в единицу времени и преобразующуюся в тепловую или другие виды энергии.

Полная мощность  $S = UI$  любого электротехнического устройства, определяемая как напряжением  $U$ , так и током  $I$ , характеризует конструктивные, массогабаритные и экономические показатели данного устройства и поэтому является весьма важной характеристикой.

Степень использования энергии электротехническими устройствами определяют отношением активной мощности к полной:

$$\frac{P}{S} = \cos \varphi$$

и называют **коэффициентом мощности**.

При  $\cos \varphi = 1$  активная мощность равна полной, что означает наиболее эффективное использование устройства, поэтому повышению коэффициента мощности электроэнергетических установок уделяется серьёзное внимание.

Например, для электродвигателя мощностью  $P = 10$  кВт при  $\cos \varphi = 0,8$  источник энергии должен быть рассчитан на полную мощность  $S = \frac{P}{\cos \varphi} = \frac{10}{0,8} = 12,5$  кВ·А, а при  $\cos \varphi = 1$  только на  $S = 10$  кВ·А.

Кроме того, потери в линии передачи энергии к приёмнику с заданными активной мощностью и напряжением при высоком  $\cos \varphi$  будут меньше, так как ток в линии тем меньше, чем больше  $\cos \varphi$ :

$$I = \frac{P}{U \cos \varphi}.$$

Реактивная мощность  $Q = UI \sin \varphi$  численно характеризует долю энергии, которой обмениваются потребитель и источник. Эта доля энергии непрерывно «гуляет» по линии передачи, бесполезно загружает её, увеличивает потери и требует рассчитывать линию, провода и коммутационную аппаратуру на больший ток.

Реактивная мощность

$$Q = UI \sin \varphi = XI^2 = (X_L - X_C)I^2 = X_L I^2 - X_C I^2 = Q_L - Q_C.$$

Это соотношение показывает, что повышение  $\cos \varphi$  возможно путём компенсации реактивной мощности индуктивного характера  $Q_L$  реактивной мощностью ёмкостного характера  $Q_C$ . На самом деле, при  $Q_L = Q_C$  реактивная мощность

$$Q = 0, \quad \varphi = 0, \quad \text{а} \quad \cos \varphi = 1.$$

### 7.3 Резонанс напряжений

**Резонансом напряжений** называется такой режим в цепи, содержащей индуктивности и ёмкости, при котором напряжение и ток совпадают по фазе, т.е. сдвиг фаз  $\varphi = 0$ .

В цепи с последовательным соединением активного сопротивления  $R$ , индуктивности  $L$  и ёмкости  $C$  сдвиг фаз определяется из выражения

$$\varphi = \arctg \frac{X}{R} = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

При резонансе  $\varphi = 0$ . Это будет иметь место, когда  $X = X_L - X_C = 0$  или  $X_L = X_C$ , т.е.

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}.$$

Это равенство называют **условием резонанса напряжений**, следовательно, резонанс может быть достигнут либо изменением частоты  $\omega$  напряжения источника, либо изменением параметров элементов цепи – индуктивности  $L$  и ёмкости  $C$ .

Из условия резонанса  $\omega L = \frac{1}{\omega C}$  найдём частоту, при которой он возникает

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Величина  $\omega_0$  определяется только параметрами  $L$  и  $C$  цепи и поэтому называется **резонансной частотой** или **частотой собственных колебаний** цепи. Таким образом, термин «резонанс» здесь используется не случайно. Резонанс наступает тогда, когда частота  $\omega$  вынужденных колебаний (частота источника) становится равной частоте  $\omega_0$  собственных колебаний.

$$\text{При резонансе } \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} = \rho.$$

Величина  $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$  зависит только от параметров  $L$  и  $C$  цепи, имеет размерность сопротивления и называется

**характеристическим** или **волновым сопротивлением** цепи.

Полное сопротивление цепи при резонансе

$$z_0 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = R.$$

Для заданного напряжения  $U$  ток в цепи при резонансе достигает наибольшего значения:

$$I_0 = \frac{U}{R}$$

и не зависит от значений индуктивного и емкостного сопротивлений.

Напряжение на активном сопротивлении при резонансе равно приложенному к цепи напряжению:

$$U_{R0} = RI_0 = U,$$

Это происходит потому, что напряжения на индуктивности

$$u_L = X_L I_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{и} \quad \text{ёмкости} \quad u_C = X_C I_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

находящиеся всегда в противофазе, при резонансе равны между собой и полностью компенсируют друг друга.

Напряжение на индуктивности и равное ему напряжение на ёмкости при резонансе определяются выражениями:

$$U_{L0} = X_{L0} I_0 = \omega_0 L \frac{U}{R} = \frac{\rho}{R} U = QU;$$

$$U_{C0} = X_{C0} I_0 = \frac{1}{\omega_0 C} \frac{U}{R} = \frac{\rho}{R} U = QU,$$

где  $Q = \frac{\rho}{R} = \frac{U_{L0}}{U} = \frac{U_{C0}}{U}.$

Коэффициент  $Q$ , равный отношению напряжения на индуктивности (ёмкости) при резонансе к напряжению, приложенному ко входам цепи, или отношению волнового сопротивления к активному, называется **добротностью** цепи.

При

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}} > R \quad \text{добротность } Q > 1.$$

Цепи, применяемые в радиотехнике, имеют добротности, равные десяткам и сотням единиц.

В зависимости от значения добротности  $Q$  напряжения на индуктивности и ёмкости при резонансе могут быть больше или меньше приложенного к цепи напряжения  $U$ . При  $X_{L0} = X_{C0} = \rho \gg R$  напряжение

$$U_{L0} = U_{C0} \gg U.$$

Поскольку в рассматриваемой цепи происходит взаимная компенсация напряжений на индуктивности и ёмкости, и эти напряжения могут превосходить по значению напряжение на входе цепи, такой случай резонанса принято называть **резонансом напряжений**.

Векторная диаграмма для случая резонанса напряжений, построенная для действующих значений напряжений и тока, изображена на рис. 7.6.

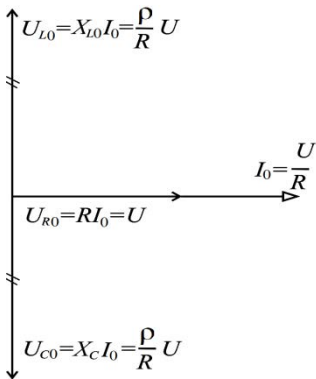


Рис. 7.6

Резонанс напряжений, возникающий в цепи с последовательным соединением элементов, широко используется в электротехнике и радиотехнике. Однако в устройствах, где режим резонанса напряжений не предусмотрен, появление резонанса нежелательно, так как возникающие значительные напряжения на индуктивности и ёмкости могут оказаться недопустимыми для изоляции и опасными при обслуживании.

При резонансе, когда  $X_L = X_C$ , мгновенные мощности на индуктивности

$$q_L = u_L i = X_L I^2 \sin 2\omega t.$$

и ёмкости

$$q_C = u_C i = -X_C I^2 \sin 2\omega t$$

в любой момент времени равны и противоположны по знаку, и, следовательно, происходит обмен энергией между магнитным полем индуктивности и электрическим полем емкости.

Уменьшение энергии магнитного поля сопровождается увеличением энергии электрического поля, и наоборот. Таким образом, происходит полный обмен энергией между магнитным и электрическим полями цепей, а источник энергии, питающий цепь, лишь покрывает расходы энергии в активном сопротивлении. Поэтому для источника энергии такая цепь эквивалентна только активному сопротивлению.

Полная, активная и реактивная мощности при резонансе напряжений будут соответствовать равенствам:

$$S_0 = UI_0, P_0 = UI_0, Q_0 = 0.$$

## 7.4 Частотные характеристики цепи

Изменение частоты питающего напряжения всегда приводит к изменению режима работы цепи, так как с частотой изменяются индуктивное, емкостное, реактивное и полное сопротивления цепи, а также сдвиг фаз.

Зависимость от частоты различных величин, характеризующих электрическую цепь и режим её работы, принято называть **частотными характеристиками** цепи.

Частотные характеристики сопротивлений определяются известными зависимостями:

$$X_L(\omega) = \omega L, \quad X_C(\omega) = \frac{1}{\omega C}, \quad X(\omega) = \omega L - \frac{1}{\omega C},$$

$$z(\omega) = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

и изображены на рис. 7.7, а, б.

Частотная характеристика сдвига фаз

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

при резонансной частоте  $\omega = \omega_0$  пересекает ось абсцисс (рис. 7.7, в), так как  $\varphi(\omega_0) = \arctg(0) = 0$ .

Для теоретически возможных частот  $\omega = 0$  и  $\omega = \infty$  сдвиг фаз  $\varphi(0) = \arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$  и  $\varphi(\infty) = \arctg(\infty) = \frac{\pi}{2}$ . Следовательно, при  $\omega < \omega_0$  цепь имеет емкостной, а при  $\omega > \omega_0$  – индуктивный характер.

Если активное сопротивление  $R$  цепи равно нулю или мало и много меньше  $X_L$  и  $X_C$ , то при  $\omega = \omega_0$  сдвиг фаз  $\varphi$  изменяется практически скачкообразно от  $-\frac{\pi}{2}$  до  $+\frac{\pi}{2}$  (рис. 7.7, г).

Рассмотрим частотные характеристики тока  $I(\omega)$ , напряжений  $U_R(\omega)$ ,  $U_L(\omega)$ ,  $U_C(\omega)$  для цепи с постоянными параметрами  $R, L, C$  и неизменным напряжением  $U$  на её входах (рис. 7.8).

Частотная характеристика тока определяется по формуле

$$I(\omega) = \frac{U}{z(\omega)} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}.$$

Кривая тока начинается от нуля при  $\omega = 0$  ( $X_C = \frac{1}{\omega C} = \infty$ ), достигает максимального значения  $\frac{U}{R}$  (в случае  $\omega = \omega_0$ ) и снова стремится к нулю при  $\omega = \infty$  ( $X_L = \omega L = \infty$ ). Аналогично изменяется напряжение на активном сопротивлении  $U_R(\omega) = RI(\omega)$ .

Частотная характеристика напряжения на индуктивности имеет вид:

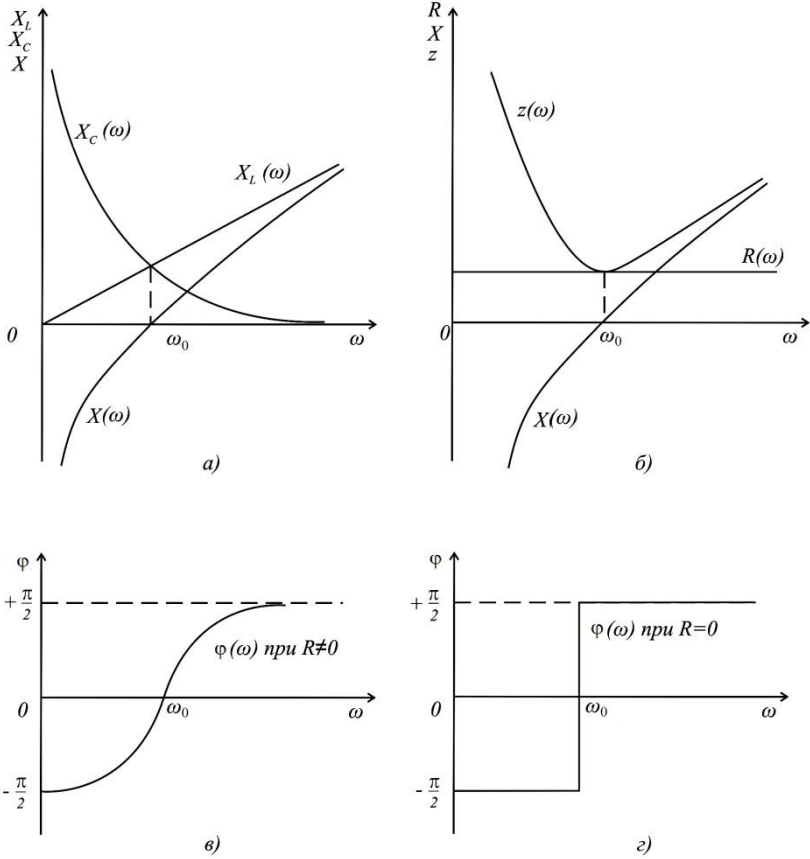


Рис. 7.7

$$U_L(\omega) = \omega L I(\omega) = \frac{\omega L U}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{U}{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{\omega^2 Q^2} + (1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2})^2}},$$

где  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ,  $Q = \frac{\rho}{R}$ .

При  $\omega = 0$  напряжение  $U_L = 0$ . При  $\omega = \omega_0$   $U_{L0} = QU$  и при  $\omega = \infty$   $U_L = U$ . При  $\omega > \omega_0$  возможен максимум  $U_L$ . Частота  $\omega_L$ , при которой  $U_L$  максимально, может быть найдена в результате исследования выражения  $U_L(\omega)$  на максимум или, что проще, исследования на минимум выражения под радикалом.

В итоге получаем

$$\omega_L = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}.$$

Это выражение показывает, что  $U_L$  может иметь максимум в цепях с добротностью  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ , так как угловая частота  $\omega = 2\pi f$  имеет физический смысл только как вещественная и положительная величина. Кривая  $U_L$  при  $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$  монотонно возрастает от  $U_L = 0$  (при  $\omega = 0$ ) до  $U_L = U$  (при  $\omega = \infty$ ).

Подставив  $\omega = \omega_L$  в выражение для  $U_L(\omega)$ , получим максимальное значение напряжения на индуктивности

$$U_{L\max} = \frac{QU}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = \frac{U_{L0}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}.$$

Частотная характеристика  $U_L(\omega)$  изображена на рис. 7.8 (сплошной линией для  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$  и пунктиром – для  $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ).

Частотная характеристика напряжения на ёмкости определяется по формуле:

$$U_C(\omega) = \frac{1}{\omega C} I(\omega) = \frac{U}{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \frac{U}{\sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_0^2 Q^2} + \left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - 1\right)^2}}.$$

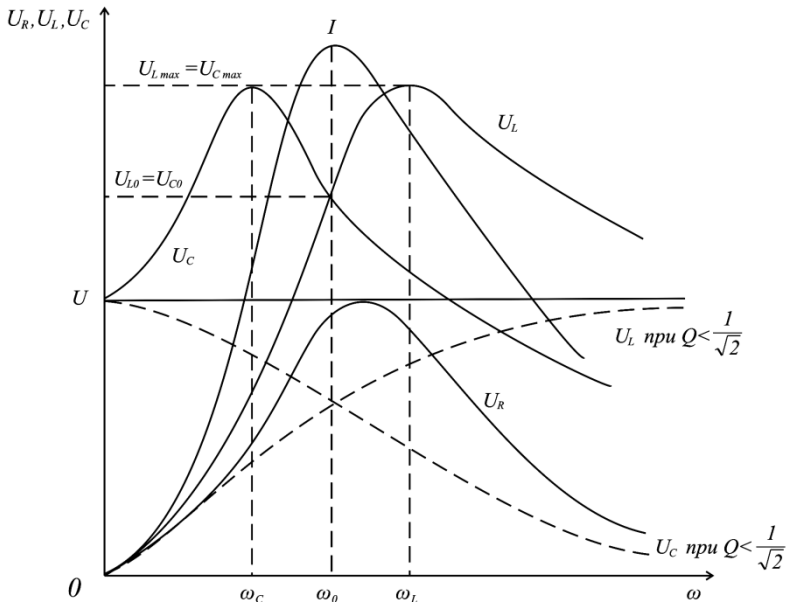


Рис. 7.8

При  $\omega = 0$  напряжение  $U_C = U$ . При  $\omega = \omega_0$   $U_{C0} = QU$ , при  $\omega = \infty$   $U_C = 0$ . В случае  $\omega < \omega_0$  возможен максимум  $U_C$ .

Исследуя на минимум выражение под радикалом, получаем

$$\omega_c = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}.$$

Из этого равенства видно, что при  $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$  напряжение на ёмкости, так же как и на индуктивности, максимума не имеет, а монотонно уменьшается от  $U_C = U$  (при  $\omega = 0$ ) до  $U_C = 0$  (при  $\omega = \infty$ ). После подстановки  $\omega = \omega_c$  в выражение для  $U_C(\omega)$  получим максимальное значение напряжения на ёмкости, равное максимальному значению напряжения на индуктивности:

$$U_{C \max} = \frac{QU}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = \frac{U_{C0}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = U_{L \max}.$$

Частотные характеристики показывают, что рассматриваемая цепь имеет наименьшее сопротивление для частот, близких к резонансной частоте, т.е. цепь обладает избирательными свойствами, которые широко используются в радиотехнике.

Для сравнения электрических цепей друг с другом частотные характеристики токов удобнее строить в относительных величинах, а именно в виде зависимости  $\frac{I}{I_0}$  в

функции от  $\frac{\omega}{\omega_0}$ .

Имея в виду, что  $I_0 = \frac{U}{R}$ ,  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  и  $Q = \frac{\rho}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}$ ,

получим:

$$\begin{aligned} \frac{I}{I_0} &= \frac{R}{z} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega_0^2 L^2}{R^2} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega \omega_0 LC} \right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}. \end{aligned}$$

Таким образом, влияние параметров цепи на вид частотной характеристики  $\frac{I}{I_0} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)$  в основном определяется значением добротности  $Q$ .

На рис. 7.9 показаны зависимости  $\frac{I}{I_0}$  от частоты для нескольких значений добротности  $Q$ .

Из приведённых кривых видно, что чем больше добротность, тем острее частотная характеристика и тем лучше избирательные свойства цепи.

Принято считать, что цепь пропускает те частоты, для которых мощность  $P = RI^2$ , потребляемая цепью, больше половины максимальной мощности  $P_0 = RI_0^2$ , т.е. мощности, потребляемой при резонансе, что имеет место при  $\frac{I}{I_0} > \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Область частот  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ , в которой  $\frac{I}{I_0} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ , называют

*полосой пропускания* цепи.

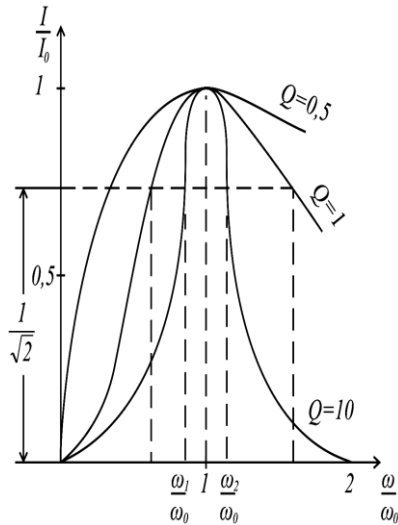


Рис. 7.9

## 7.5 Расчёт цепи с последовательным соединением активного сопротивления, индуктивности и ёмкости

Расчёт цепей с последовательным соединением активного сопротивления, индуктивности и ёмкости производится, как правило, для действующих значений тока и напряжений и основан на соотношениях, следующих из треугольников сопротивлений, напряжений и мощностей.

**П р и м е р.**

Последовательно соединены резистор, индуктивная катушка и конденсатор с параметрами  $R = 4$  Ом,  $L = 0,02$  Гн,  $C = 1000$  мкФ. Цепь подключена к источнику с напряжением  $U = 100$  В и частотой  $f = 50$  Гц. Определить действующие

значения тока, напряжения на каждом элементе, сдвиг фаз, активную, реактивную и полную мощности цепи. Записать мгновенные значения всех напряжений и тока цепи.

**Р е ш е н и е.**

Соппротивления элементов и полное сопротивление цепи будут равны:

$$X_L = \omega L = 2\pi f L = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 0,02 = 6,28 \text{ Ом};$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f C} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 1000 \cdot 10^{-6}} = 3,18 \text{ Ом};$$

$$X = X_L - X_C = 6,28 - 3,18 = 3,1 \text{ Ом};$$

$$z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{4^2 + 3,1^2} = 5 \text{ Ом}.$$

В цепи протекает ток

$$I = \frac{U}{z} = \frac{100}{5} = 20 \text{ А},$$

который запаздывает по фазе от напряжения, причём

$$\varphi = \arctg \frac{X_L - X_C}{R} = \arctg \frac{6,28 - 3,18}{4} = 37,0^\circ$$

Действующие значения напряжений на резисторе, катушке индуктивности и конденсаторе соответственно равны:

$$U_R = RI = 4 \cdot 20 = 80 \text{ В};$$

$$U_L = X_L I = 6,28 \cdot 20 = 125,6 \text{ В};$$

$$U_C = X_C I = 3,18 \cdot 20 = 63,6 \text{ В}.$$

Вычислим активную, реактивную и полную мощности цепи:

$$P = RI^2 = 4 \cdot 20^2 = 1600 \text{ Вт} = 1,6 \text{ кВт};$$

$$Q = XI^2 = 3,1 \cdot 20^2 = 1240 \text{ вар} = 1,24 \text{ квар}$$

$$S = UI = 100 \cdot 20 = 2000 \text{ В} \cdot \text{А} = 2 \text{ кВт} \cdot \text{А}$$

Если начальную фазу тока принять равной нулю, то начальная фаза напряжения равна  $\psi_u = \varphi + \psi_i = 37,0^\circ + 0^\circ = 37,0^\circ$ .

Запишем уравнения мгновенных значений тока и напряжений:

$$i = I_m \sin \omega t = 20\sqrt{2} \sin \omega t = 28,2 \sin \omega t = 28,2 \sin 314t \text{ A};$$

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u) = 100\sqrt{2} \sin(\omega t + 37^\circ) = 141 \sin(314t + 37^\circ) \text{ В};$$

$$u_R = Ri = RI_m \sin \omega t = 4 \cdot 20\sqrt{2} \sin \omega t = 112,8 \sin 314t \text{ В};$$

$$u_L = X_L I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = 6,28 \cdot 20\sqrt{2} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = 177 \sin(314t + \frac{\pi}{2}) \text{ В};$$

$$u_C = X_C I_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = 3,18 \cdot 20\sqrt{2} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = 90 \sin(314t - \frac{\pi}{2}) \text{ В}.$$

Электрическая цепь с любым числом последовательно соединённых активных сопротивлений, индуктивностей и емкостей может быть сведена к рассмотренному случаю последовательного соединения  $R$ ,  $L$  и  $C$ . При этом эквивалентные активное, индуктивное и емкостное сопротивления равны:

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n;$$

$$X_L = \omega(L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_m);$$

$$X_C = \frac{1}{\omega}(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_k}).$$

## 8 ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ С ПАРАЛЛЕЛЬНЫМ СОЕДИНЕНИЕМ АКТИВНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ, ИНДУКТИВНОСТИ И ЁМКОСТИ

### 8.1 Основные соотношения между напряжением и токами

Рассмотрим цепь с параллельным соединением активного сопротивления  $R$ , индуктивности  $L$  и ёмкости  $C$ , изображённую на рис. 8.1, а, к выводам которой приложено напряжение

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u).$$

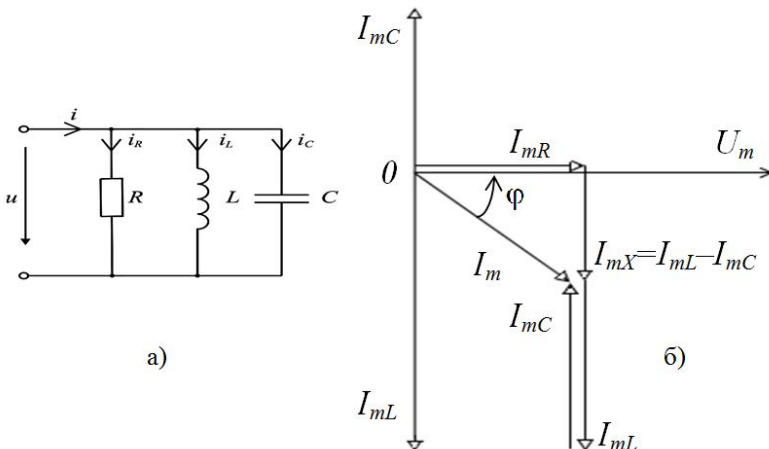


Рис. 8.1

Для простоты примем  $\psi_u = 0$ . В этой цепи удобно считать заданным напряжение, так как оно при параллельном соединении одинаково для всех элементов.

При известных  $R$ ,  $L$  и  $C$  найдём токи, протекающие через элементы и ток в неразветвлённой части цепи.

На основании первого закона Кирхгофа мгновенное значение тока всей цепи равно алгебраической сумме мгновенных значений токов через отдельные элементы:

$$i = i_R + i_L + i_C = \frac{u}{R} + \frac{1}{L} \int u dt + C \frac{du}{dt}.$$

После подстановки в это выражение напряжения  $u = U_m \sin \omega t$  ток всей цепи представляется в виде суммы трёх синусоид:

$$\begin{aligned} i &= \frac{U_m}{R} \sin \omega t + \frac{U_m}{\omega L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \omega C U_m \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= I_{mR} \sin \omega t + I_{mL} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + I_{mC} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

где  $I_{mR} = \frac{U_m}{R}$ ,  $I_{mL} = \frac{U_m}{\omega L}$ ,  $I_{mC} = \omega C U_m$  — амплитуды токов ветвей соответственно с активным сопротивлением  $R$ , индуктивностью  $L$  и ёмкостью  $C$ .

Для действующих значений эти соотношения будут иметь вид:

$$I_R = \frac{U}{R}, \quad I_L = \frac{U}{X_L}, \quad I_C = \frac{U}{X_C}.$$

Ток, протекающий в неразветвлённой части цепи  $i = I_{mR} \sin \omega t + I_{mL} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + I_{mC} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ , состоит из суммы трёх синусоид и, следовательно, также будет синусоидальным:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i).$$

Таким образом, для определения мгновенного значения тока необходимо найти его амплитуду  $I_m$  и начальную фазу  $\psi_i$ . Эти величины можно определить путём математических преобразований суммы трёх синусоид. Однако удобнее решить задачу с помощью построения векторной диаграммы, изобразив токи вращающимися векторами. Тогда их геометрическая сумма и будет вектором, изображающим ток всей цепи. Это построение сделано на рис. 8.1, б, для момента времени  $t = 0$ .

Построение векторной диаграммы для цепи параллельного соединения элементов  $R$ ,  $L$  и  $C$  начинают с вектора напряжения  $U_m$ , откладывая его по горизонтальной оси (если  $\psi_u = 0$ ), либо под углом  $\psi_u$  к горизонтальной оси (если  $\psi_u \neq 0$ ).

Ток через активное сопротивление совпадает по фазе с напряжением и, следовательно, его вектор  $I_{mR}$  совпадает по направлению с вектором напряжения  $U_m$ .

Ток через индуктивность запаздывает по фазе от напряжения  $U_m$  на угол  $\frac{\pi}{2}$  и его вектор  $I_{mL}$  сдвинут относительно вектора напряжения в направлении, противоположном вращению на тот же угол. Ток через ёмкость опережает по фазе напряжение на угол  $\frac{\pi}{2}$  и его вектор  $I_{mC}$  противоположен по фазе вектору  $I_{mL}$ .

Складывая геометрически векторы токов  $I_{mR}$ ,  $I_{mL}$  и  $I_{mC}$ , получим вектор  $I_m$  тока всей цепи.

В результате сложения векторов получается прямоугольный **треугольник токов** с гипотенузой, равной амплитуде  $I_m$  тока всей цепи, катетами  $I_{mR}$  и  $I_{mX} = I_{mL} - I_{mC}$ .

Ток  $I_{mX}$  называется **реактивным**.

Из треугольника токов видно, что:

$$I_m = \sqrt{I_{mR}^2 + (I_{mL} - I_{mC})^2} = \sqrt{\frac{U_m^2}{R^2} + \left(\frac{U_m}{X_L} - \frac{U_m}{X_C}\right)^2} =$$

$$= U_m \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C}\right)^2} = U_m \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2},$$

где  $G = \frac{1}{R}$  – **активная проводимость** ветви с сопротивлением;

$B_L = \frac{1}{\omega L}$  – **индуктивная проводимость** ветви с

индуктивностью;

$B_C = \omega C$  – **емкостная проводимость** ветви с

ёмкостью.

Так как  $I_m = I\sqrt{2}$  и  $U_m = U\sqrt{2}$ , то для действующих значений тока и напряжения получим аналогичную зависимость:

$$I = U \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2}.$$

В формулах, определяющих токи  $I_m$  и  $I$ , величина  $\sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2}$  имеет размерность проводимости. Она называется **полной проводимостью** цепи и обозначается буквой  $y$ .

Полная проводимость рассматриваемой цепи

$$y = \frac{I_m}{U_m} = \frac{I}{U} = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} = \sqrt{G^2 + B^2},$$

где  $B = B_L - B_C = \frac{1}{\omega L} - \omega C$  – **реактивная проводимость** цепи.

Отметим, что реактивная проводимость  $B = B_L - B_C$  является величиной алгебраической и может быть как больше, так и меньше нуля. Например, для цепи, содержащей только ветвь с ёмкостью  $C$ , реактивная проводимость  $B$  равна емкостной проводимости  $B_C$  со знаком минус, т.е.  $B = -B_C$ .

После введения понятий полной и реактивной проводимостей выражение для тока можно записать в виде

$$I = yU = U\sqrt{G^2 + B^2};$$

Сдвиг фаз  $\varphi$  на векторной диаграмме между векторами  $U_m$  и  $I_m$  определяются выражениями:

$$\begin{aligned}\varphi &= \arctg \frac{I_{mX}}{I_{mR}} = \arctg \frac{I_X}{I_R} = \arctg \frac{I_L - I_C}{I_R} = \arctg \frac{B_L - B_C}{G} = \\ &= \arctg \frac{B}{G} = \arctg \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{\frac{1}{R}}.\end{aligned}$$

Из этих выражений видно, что значение и знак сдвига фаз  $\varphi$  определяется соотношением индуктивной и ёмкостной проводимостей. При  $B_L > B_C$  имеем  $B = B_L - B_C > 0$  и  $\varphi = \arctg \frac{B_L - B_C}{G} = \arctg \frac{B}{G} > 0$  (ток запаздывает по фазе от напряжения). При  $B_L < B_C$  имеем  $B < 0$  и  $\varphi < 0$  (ток опережает по фазе напряжение). Если  $B_L = B_C$ , то  $B = 0$ ,  $y = G = \frac{1}{R}$  и  $\varphi = 0$  (ток совпадает по фазе с напряжением), т.е. такая цепь проявляет себя как активная проводимость или активное сопротивление. Этот случай резонанса токов рассмотрен ниже.

На рис. 8.2 изображены векторные диаграммы для трёх возможных соотношений  $B_L$  и  $B_C$ .

Начальная фаза тока всей цепи определяется из соотношения:

$$\varphi = \psi_u - \psi_i, \text{ откуда } \psi_i = \psi_u - \varphi.$$

Так как начальная фаза напряжения принята равная нулю, то  $\psi_i = -\varphi$ . Таким образом, все величины, необходимые для определения мгновенного значения тока всей цепи найдены и можно записать:

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i) = I_m \sin(\omega t - \varphi).$$

Если все стороны треугольника токов для амплитудных значений разделить сначала на  $\sqrt{2}$ , а затем на напряжение  $U$ , то

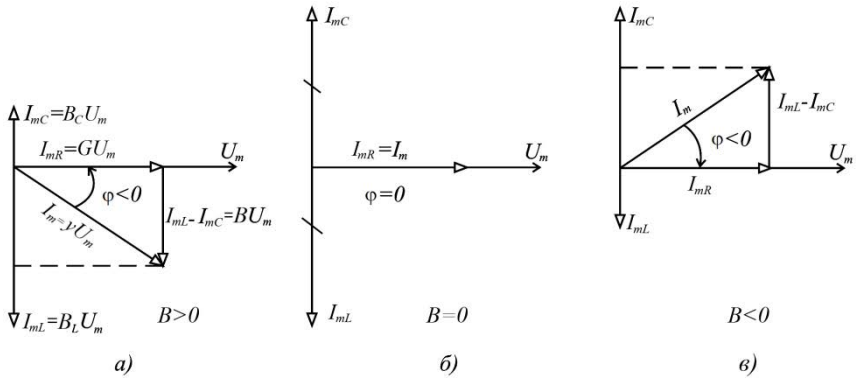


Рис. 8.2

получим подобные ему треугольник токов для действующих значений и треугольник проводимостей, представленные на рис. 8.3.

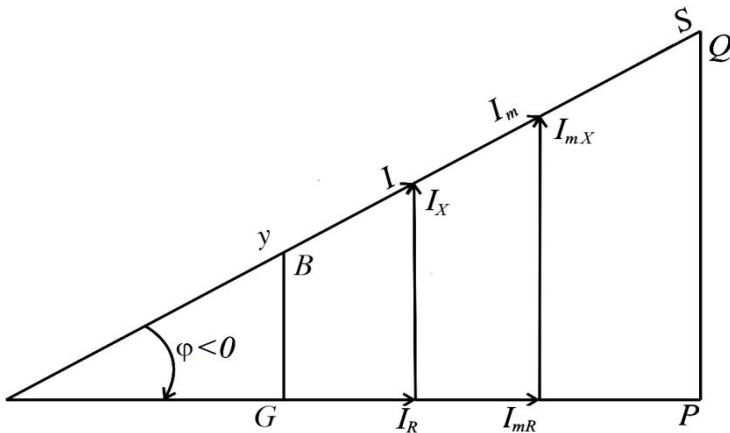


Рис. 8.3

Из этих треугольников следует, что

$$I_R = I \cos \varphi; \quad I_X = I \sin \varphi;$$

$$G = y \cos \varphi; \quad B = y \sin \varphi.$$

Очевидны и полученные ранее соотношения

$$y = \sqrt{G^2 + B^2} \quad \text{и} \quad \varphi = \arctg \frac{B}{G} = \arctg \frac{B_L - B_C}{G}.$$

Энергетические процессы в цепи с параллельным соединением  $R, L$  и  $C$  аналогичны процессам в цепи с последовательным соединением этих элементов.

В параллельной цепи также происходит обмен энергией между магнитным полем ветви с индуктивностью и электрическим полем ветви с ёмкостью. Источник энергии при  $s = ui > 0$  покрывает расходы энергии в ветви с активным сопротивлением и поставляет энергию магнитному или электрическому полю реактивных ветвей. При  $s < 0$  избыток энергии магнитного или электрического поля возвращается источнику, питающему цепь.

Выражения для полной  $S = UI$ , активной  $P = UI \cos \varphi$  и реактивной  $Q = UI \sin \varphi$  мощностей, полученные для последовательной цепи, справедливы и для параллельной цепи, но так как  $\frac{I}{U} = y$ ,  $G = y \cos \varphi$  и  $B = y \sin \varphi$ , они могут быть записаны в другом виде:

$$S = UI = yU^2; \quad P = UI \cos \varphi = GU^2; \quad Q = UI \sin \varphi = BU^2.$$

Нетрудно видеть, что полная, активная и реактивная мощности связаны в треугольник мощностей, подобный треугольнику токов, который может быть легко получен из треугольника проводимостей путём умножения всех его сторон на  $U^2$ .

Сопоставляя уравнение для напряжений последовательной цепи

$$u = Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt,$$

записанное на основании второго закона Кирхгофа, с уравнением для токов параллельной цепи

$$i = Gu + C \frac{du}{dt} + \frac{1}{L} \int u dt,$$

записанным на основании первого закона Кирхгофа, замечаем полное сходство в форме записи этих уравнений, причём одно уравнение из другого получается путём взаимной замены схемы и величин, взятых из табл. 8.1.

Таблица 8.1

|                                |     |     |     |     |     |
|--------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| Последовательное<br>соединение | $u$ | $i$ | $R$ | $C$ | $L$ |
| Параллельные<br>соединения     | $i$ | $u$ | $G$ | $L$ | $C$ |

Все соотношения, полученные при решении таких уравнений, в том числе и для действующих значений, также аналогичны по форме записи, и одно может быть получено из другого соответствующими заменами.

Две цепи, в которых напряжения первой ведут себя как токи второй и наоборот, называется **дуальными**. Цепи с последовательным и параллельным соединением  $R$ ,  $L$  и  $C$  являются дуальными. Свойства дуальных цепей позволяют применять результаты исследований одной цепи в другой путём взаимной замены параметров по таблице 8.1.

## 8.2 Резонанс токов

В цепи с параллельным соединением активного сопротивления  $R$ , индуктивности  $L$  и ёмкости  $C$  **условием резонанса** будет равенство нулю реактивной проводимости  $B = B_L - B_C = 0$  или равенство проводимостей индуктивной и емкостной ветвей  $B_L = B_C$ , т.е.

$$\frac{1}{\omega L} = \omega C \text{ или } \omega^2 LC = 1.$$

Это имеет место, когда сдвиг фаз между напряжением и током

$$\varphi = \arctg \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{1/R} = 0.$$

Резонанс в параллельной цепи также может быть получен либо изменением частоты напряжения источника, либо изменением параметров  $L$  и  $C$ .

Резонансная частота равна  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

Полная проводимость цепи при резонансе

$$y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2} = G = \frac{1}{R}.$$

Для заданного напряжения  $U$  ток в неразветвлённой части цепи при резонансе

$$I_0 = GU = \frac{U}{R}$$

имеет наименьшее значение и равен току ветви с активным сопротивлением  $R$ . Это происходит потому, что токи в ветвях с индуктивностью

$$i_L = B_L U_m \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

и ёмкостью

$$i_C = B_C U_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}),$$

находящиеся в противофазе, при резонансе равны между собой и компенсируют друг друга.

Если  $R = \infty$  ( $G = 0$ ), т.е. цепь содержит только параллельно соединённые  $L$  и  $C$ , то при резонансе  $y = G = 0$  и ток

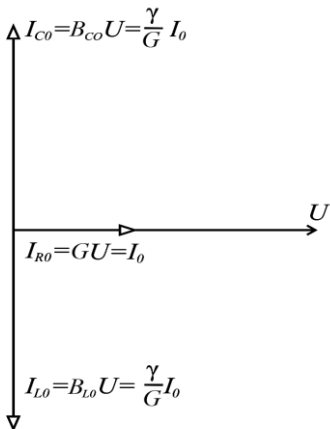


Рис.8.4

$I_0 = GU = 0$ . Это означает, что такая цепь при резонансе не пропускает ток данной частоты.

Векторная диаграмма для случая резонанса, построенная в действующих значениях напряжения и токов, показана на рис. 8.4. Принимая во внимание, что  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , индуктивную

$B_{L0} = \frac{1}{\omega_0 L}$  и ёмкостную  $B_{C0} = \omega_0 C$  проводимости при резонансе можно записать в виде

$$\frac{1}{\omega_0 L} = \omega_0 C = \sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{\rho} = \gamma.$$

Величина  $\gamma$ , обратная волновому сопротивлению  $\rho$ , называется **волновой проводимостью**.

Ток в ветви с индуктивностью и равный ему ток в ветви с ёмкостью при резонансе

$$I_{L0} = B_{L0} U = \frac{1}{\omega_0 L} \frac{I_0}{G} = \frac{\gamma}{G} I_0 = Q I_0;$$

$$I_{C0} = B_{C0} U = \omega_0 C \frac{I_0}{G} = \frac{\gamma}{G} I_0 = Q I_0 = I_{L0},$$

где  $Q = \frac{\gamma}{G} = \frac{I_{L0}}{I_0} = \frac{I_{C0}}{I_0}$ .

Величина  $Q$ , определяющая кратность превышения тока в ветвях с индуктивностью и ёмкостью над общим током цепи при резонансе, называется добротностью цепи.

Отметим, что зависимость добротности  $Q$  от параметров  $R$ ,  $L$  и  $C$  для последовательной и параллельной цепей неодинакова. Например, при неизменных  $L$  и  $C$  добротность параллельной цепи будет тем больше, чем больше активное сопротивление  $R$ , так как

$$Q = \frac{\rho}{G} = \frac{R}{\sqrt{L/C}}.$$

Для последовательной цепи, наоборот, увеличение сопротивления  $R$  уменьшает добротности, так как

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}.$$

В зависимости от значения добротности  $Q$  токи в реактивных ветвях при резонансе могут быть больше или меньше общего тока цепи. При  $B_{L0} = B_{C0} = \gamma \gg G$  токи  $I_{L0} = I_{C0} \gg I_0$ .

В связи с тем, что в рассматриваемой цепи происходит взаимная компенсация токов ветвей с индуктивностью и ёмкостью и эти токи могут превосходить по значению общий ток цепи, такой случай резонанса называется **резонансом токов**.

Энергетические процессы при резонансе токов аналогичны процессам при резонансе напряжений. Суммарная энергия магнитного и электрического полей в параллельной цепи в любой момент времени также останется неизменной и между ветвями с индуктивностью и ёмкостью происходит полный обмен энергией. Источник же энергии покрывает её расход в ветви с активным сопротивлением и для него, так же как и при резонансе напряжений, вся цепь эквивалентна одному активному сопротивлению.

### 8.3 Частотные характеристики цепи

Частотные характеристики проводимостей  $B_L(\omega) = \frac{1}{\omega L}$ ,

$$B_C(\omega) = \omega C, \quad B(\omega) = B_L(\omega) - B_C(\omega), \quad y(\omega) = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}$$

и сдвига фаз  $\varphi(\omega) = \arctg \frac{1/\omega L - \omega C}{1/R}$  изображены на рис. 8.5.

Так как до резонанса  $B_L > B_C$ , то  $\varphi > 0$  и полная

проводимость имеет индуктивный характер, а после резонанса  $B_L < B_C$ ,  $\varphi < 0$  – полная проводимость имеет емкостной характер.

При резонансе ( $\omega = \omega_0$ ) полная проводимость  $y$  становится наименьшей. Для теоретически возможных частот  $\omega = 0$  и  $\omega = \infty$  сдвиг фаз  $\varphi(0) = \arctg(+\infty) = \frac{\pi}{2}$  и  $\varphi(\infty) = \arctg(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$ . При  $\omega = \omega_0$  кривая  $\varphi(\omega)$  пересекает ось абсцисс (рис. 8.5, в). В частном случае, когда  $G = 0$  ( $R = \infty$ ) и  $\omega = \omega_0$ , сдвиг фаз изменяется скачком от  $+\frac{\pi}{2}$  до  $-\frac{\pi}{2}$  (рис. 8.5, з).

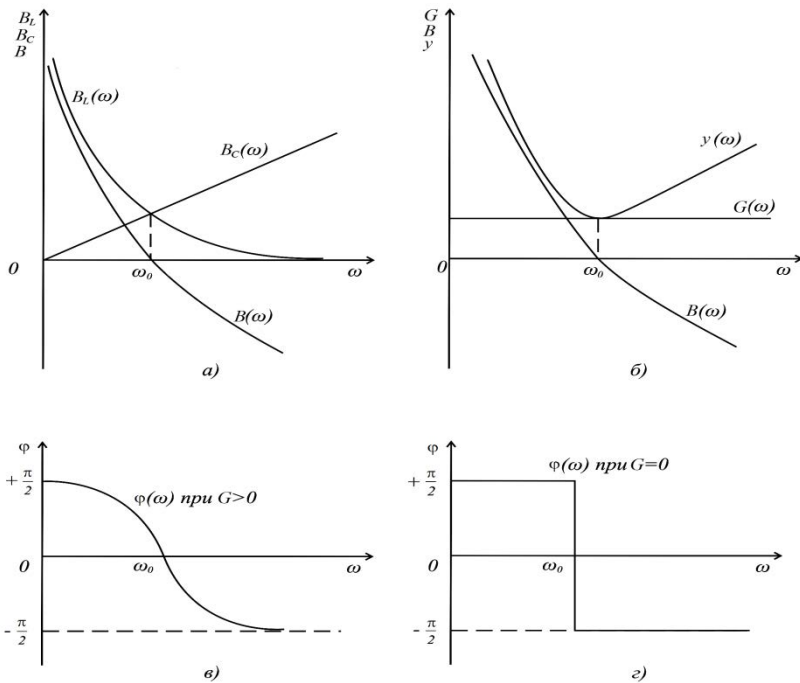


Рис. 8.5

Рассмотрим частотные характеристики токов  $I_L(\omega)$ ,  $I_C(\omega)$ ,  $I(\omega)$  для параллельной цепи с постоянными параметрами  $R$ ,  $L$ ,  $C$  и неизменным напряжением  $U$  на её входах.

Частотные характеристики токов в ветвях с индуктивностью и ёмкостью определяются по формулам

$$I_L(\omega) = \frac{U}{\omega L} \text{ и } I_C(\omega) = \omega C U.$$

С увеличением частоты ток в индуктивной ветви убывает, а в ёмкостной возрастает, при резонансе  $I_{L0} = I_{C0} = QI_0$ .

Частотная характеристика общего тока в цепи определяется из выражения  $I(\omega) = y(\omega)U = U \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}$ . Кривая тока  $I(\omega)$  (рис. 8.6) имеет минимум  $I_0 = GU = \frac{U}{R}$  при резонансной частоте  $\omega = \omega_0$  и стремится к бесконечности при частотах  $\omega = 0$  ( $B_L = \frac{1}{\omega L} = \infty$ ) и  $\omega = \infty$  ( $B_C = \omega C = \infty$ )

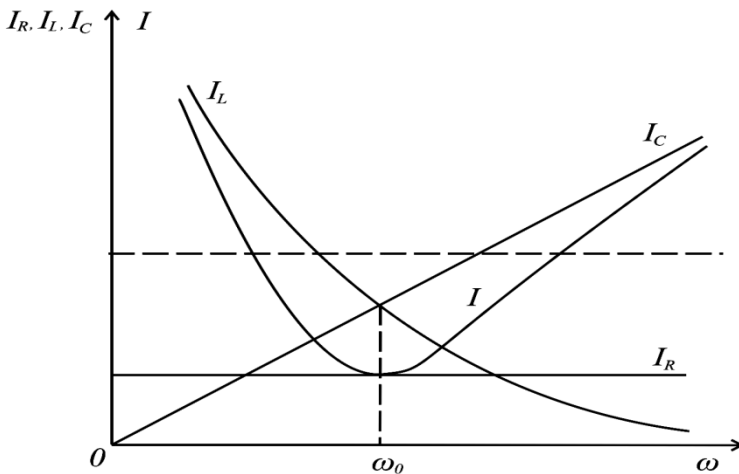


Рис. 8.6

Частотные характеристики показывают, что параллельная цепь в отличие от последовательной цепи для частот, близких к резонансной, имеет наибольшее сопротивление, т.е. для этих частот цепь обладает не избирательными, а запирающими свойствами, которые также широко используются в электротехнике, например в электрических  $LC$ -фильтрах.

#### **8.4 Расчёт цепи с параллельным соединением активного сопротивления, индуктивности и ёмкости**

Расчёт цепей с параллельным соединением активного сопротивления, индуктивности и ёмкости производится, как правило, для действующих значений напряжения и токов и основан на соотношениях, следующих из треугольников проводимостей, токов и мощностей.

**П р и м е р.**

К цепи с параллельным соединением резистора, катушки индуктивности и конденсатора приложено напряжение  $U = 100 \text{ В}$  при частоте  $f = 400 \text{ Гц}$ . Определить действующие значения токов через элементы и тока всей цепи, а также сдвиг фаз, активную, реактивную и полную мощности цепи, если  $R = 25 \text{ Ом}$ ,  $L = 13,3 \text{ мГн}$ ,  $C = 24 \text{ мкФ}$ . Записать мгновенные значения напряжения и всех токов.

**Р е ш е н и е.**

Проводимости элементов и всей цепи будут равны:

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{25} = 0,04 \text{ См};$$

$$B_L = \frac{1}{\omega L} = \frac{1}{2\pi \cdot 400 \cdot 13,3 \cdot 10^{-3}} = 0,03 \text{ См};$$

$$B_C = \omega C = 2\pi \cdot 400 \cdot 24 \cdot 10^{-6} = 0,06 \text{ См};$$

$$y = \sqrt{G^2 + (B_L - B_C)^2} = \sqrt{0,04^2 + (0,03 - 0,06)^2} = 0,05 \text{ См}.$$

Токи ветвей соответственно равны:

$$I_R = GU = 0,04 \cdot 100 = 4 \text{ A};$$

$$I_L = B_L U = 0,03 \cdot 100 = 3 \text{ A};$$

$$I_C = B_C U = 0,06 \cdot 100 = 6 \text{ A}.$$

Ток в неразветвлённой части цепи

$$I = yU = 0,05 \cdot 100 = 5 \text{ A} \text{ или}$$

$$I = \sqrt{I_R^2 + (I_L - I_C)^2} = \sqrt{5^2 + (3 - 6)^2} = 5 \text{ A}.$$

Сдвиг фаз

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{B_L - B_C}{G} = \operatorname{arctg} \frac{0,03 - 0,06}{0,04} = -37^\circ.$$

Активная, реактивная и полная мощности соответственно равны:

$$P = GU^2 = 0,04 \cdot 100^2 = 400 \text{ Вт};$$

$$Q = (B_L - B_C)U^2 = (0,03 - 0,06) \cdot 100^2 = -300 \text{ вар};$$

$$S = yU^2 = 0,05 \cdot 100^2 = 500 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

Если начальную фазу  $\psi_u$  напряжения принять равной нулю, то можно записать:

$$u = U\sqrt{2} \sin \omega t = 100\sqrt{2} \sin 2512 t \text{ В};$$

$$i = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \psi_i) = 5\sqrt{2} \sin(2512 t + 37^\circ) \text{ А};$$

$$i_R = I_R\sqrt{2} \sin \omega t = 4\sqrt{2} \sin 2512 t \text{ А};$$

$$i_L = I_L\sqrt{2} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) = 3\sqrt{2} \sin(2512 t - \frac{\pi}{2}) \text{ А};$$

$$i_C = I_C\sqrt{2} \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = 6\sqrt{2} \sin(2512 t + \frac{\pi}{2}) \text{ А}.$$

Электрическая цепь с любым числом параллельно соединённых активных сопротивлений  $R$ , индуктивностей  $L$  и емкостей  $C$  может быть сведена к рассмотренному случаю

параллельного соединения  $R, L$  и  $C$ . При этом эквивалентные активная, индуктивная и емкостная проводимости равны:

$$G = \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n} = G_1 + G_2 + G_3 + \dots + G_n,$$

$$B_L = \frac{1}{\omega L} = \frac{1}{\omega} \left( \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_m} \right),$$

$$B_C = \omega C = \omega (C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_k).$$

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Изложенные в учебном пособии вопросы являются только одним из разделов дисциплины «Теоретические основы электротехники», Тем не менее изучение процессов, протекающих в классических линейных электрических цепях синусоидального тока, имеет важное практическое значение.

Знание основных положений теории линейных электрических цепей синусоидального тока поможет курсантам и слушателям освоить другие разделы дисциплины «Теоретические основы электротехники», а также специальные дисциплины электротехнического направления.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бычков Ю.А., Золотницкий В.М., Чернышёв Э.П.* Основы теории электрических цепей: учебник для вузов. – СПб.: Лань, 2002. – 464 с.
2. Основы теории цепей: учебник для вузов /*Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин, А.В. Нетушил, С.В. Страхов.* – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 528 с.
3. *Абрамов Ю.Н., Усов Б.Н.* Теоретические основы электротехники. Ч.1: учеб. пособие. – Л.: ВИКИ им. А.Ф. Можайского, 1986. – 236 с.
4. ГОСТ Р 52002–2003. ЭЛЕКТРОТЕХНИКА: Термины и определения основных понятий. – М., 2003. – 28 с.