

Математические методы
(Исследование операций, Методы оптимизации)
Линейное программирование



ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

1.1.1. Формы задачи линейного программирования.

В общем виде задача линейного программирования* (в дальнейшем ЗЛП) может быть сформулирована как задача нахождения наибольшего значения линейной функции

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j = cx \quad (1.1)$$

на некотором множестве $D \subset R^n$, где $x \in D$ удовлетворяют системе ограничений

$$\begin{aligned} a_{1,1} x_1 + a_{1,2} x_2 + \dots + a_{1,n} x_n &\leq b_1, \\ a_{2,1} x_1 + a_{2,2} x_2 + \dots + a_{2,n} x_n &\leq b_2, \\ &\dots \\ a_{m,1} x_1 + a_{m,2} x_2 + \dots + a_{m,n} x_n &\leq b_m, \\ a_{m+1,1} x_1 + a_{m+1,2} x_2 + \dots + a_{m+1,n} x_n &= b_{m+1}, \\ &\dots \\ a_{m+l,1} x_1 + a_{m+l,2} x_2 + \dots + a_{m+l,n} x_n &= b_{m+l}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

и, возможно, ограничениям

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_j \geq 0, \dots, x_n \geq 0. \quad (1.3)$$

* Напомним, что частные примеры, сводящиеся к задаче линейного программирования, были описаны во введении.

Ограничения

- Не умаляя общности, можно считать, что в системе (1.2) **пер вые m ограничений являются неравенствами, а последующие — I -уравнениями.** Очевидно, этого всегда можно добиться за счет простого переупорядочения ограничений.
- Относительно направления знака неравенства будем предполагать, что левая часть меньше или равна правой. Добиться этого можно, умножив на (-1) обе части тех неравенств, которые имеют противоположный знак.
- Ограничения (1.3), вообще говоря, могут быть рассмотрены как частный случай ограничений в форме неравенств, но в силу особой структуры их обычно выделяют отдельно и называют **условиями неотрицательности** (или тривиальными ограничениями).

Условия задачи линейного программирования

- Часто условия задачи (1.1)-(1.3), содержащей ограничения только типа неравенств, бывает удобно записывать в сокращенной матричной форме
- $f(x) = cx \rightarrow \text{extr}, Ax \leq b, x \geq 0, \quad (1.6)$
- где c и x — векторы из пространства R^n , b — вектор из пространства R^m , а A — матрица размерности $m \times n$.
- Задачу линейного программирования, записанную в форме (1.1)-(1.3), называют **общей задачей линейного программирования (ОЗЛП)**.
- Если все ограничения в задаче линейного программирования являются уравнениями и на все переменные x_j наложены условия неотрицательности, то она называется задачей линейного программирования в канонической форме, или **канонической задачей линейного программирования (КЗЛП)**.

Основные определения

- В матричной форме КЗЛП можно записать в следующем виде:

$$f(x) = cx \rightarrow \max, D = \{x \in R^n \mid Ax = b, x \geq 0\}. \quad (1.7)$$

- Поскольку любая оптимизационная задача однозначно определяется **целевой функцией f и областью D , на которой отыскивается оптимум (максимум), будем обозначать эту задачу парой (D, f) .**
- Условимся относительно терминологии, которая используется в дальнейшем и является общепринятой в теории линейного программирования.
- Планом 3ЛП** называется всякий вектор x из пространства R^n .
- Допустимым планом** называется такой план 3ЛП, который удовлетворяет ограничениям (1.2)-(1.3), т. е. содержится в области D . Сама область D называется при этом **областью допустимых планов.**

Основные определения

- **Оптимальным планом x^* называется такой допустимый план**, при котором целевая функция достигает оптимального (в нашем случае — максимального) значения, т. е. план, удовлетворяющий условию

$$\max f(x) = f(x^*).$$

- Величина **$f^* = f(x^*)$ называется оптимальным значением целевой функции.**
- Решением задачи называется **пара (x^*, f^*) , состоящая из оптимального плана и оптимального значения целевой функции**, а процесс решения заключается в отыскании множества всех решений ЗЛП.

Переход к канонической форме ЗЛП

- ограничения в виде неравенств преобразуются в уравнения за счет добавления фиктивных неотрицательных переменных x_i , ($i \in 1:m$), которые одновременно входят в целевую функцию с коэффициентом 0, т. е. не оказывают влияния на ее значение;
- переменные, на которые не наложено условие неотрицательности, представляются в виде разности двух новых неотрицательных переменных

Пример

Проиллюстрируем применение описанных выше рекомендаций на примере. Пусть задана задача линейного программирования (D, f) в общей форме с целевой функцией

$$f(x) = 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - 2x_5 \rightarrow \max$$

и множеством допустимых планов D , определенным системой уравнений и неравенств

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 7,$$

$$-3x_2 + 4x_3 - 5x_4 - 4x_5 \leq 2,$$

$$3x_1 - 5x_3 + 6x_4 - 2x_5 \leq 4,$$

$$x_1 \geq 0,$$

$$x_3 \geq 0.$$

Каноническая форма ЗЛП

Тогда в соответствии со сформулированными правилами эквивалентная каноническая задача будет иметь вид (D', f') , где:

$$f'(x') = 5x_1 + 3\bar{x}_2 - 3\bar{\bar{x}}_2 + x_3 + 2\bar{x}_4 - 2\bar{\bar{x}}_4 - 2\bar{x}_5 + 2\bar{\bar{x}}_5 + 0x'_2 + 0x'_3 \rightarrow \max,$$

а множество D' определено как:

$$2x_1 + 4\bar{x}_2 - 4\bar{\bar{x}}_2 + 5x_3 = 7,$$

$$-3\bar{x}_2 + 3\bar{\bar{x}}_2 + 4x_3 - 5\bar{x}_4 + 5\bar{\bar{x}}_4 - 4\bar{x}_5 + 4\bar{\bar{x}}_5 + x'_2 = 2,$$

$$3x_1 - 5x_3 + 6\bar{x}_4 - 6\bar{\bar{x}}_4 - 2\bar{x}_5 + 2\bar{\bar{x}}_5 + x'_3 = 4,$$

$$x_1 \geq 0, \bar{x}_2 \geq 0, \bar{\bar{x}}_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \bar{x}_4 \geq 0, \bar{\bar{x}}_4 \geq 0, \bar{x}_5 \geq 0, \bar{\bar{x}}_5 \geq 0,$$

$$x'_2 \geq 0, x'_3 \geq 0.$$

Нетрудно заметить, что «платой» за переход от общей формы задачи линейного программирования к канонической является рост ее размерности, что, при прочих равных условиях, является фактором, усложняющим процесс решения.

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ЗЛП И ЕЕ ПЕРВАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Основные понятия линейной алгебры и выпуклого анализа,
применяемые в теории математического программирования

Линейное (вещественное) пространство

множество некоторых элементов (именуемых векторами или точками), для которых **заданы операции сложения и умножения на вещественное число (скаляр)**, причем элементы, являющиеся результатом выполнения операций, также в соответствии с определением должны принадлежать исходному пространству.

Частными случаями линейных пространств являются вещественная прямая, плоскость, геометрическое трехмерное пространство



Основные понятия линейной алгебры

Вектор $\lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + \dots + \lambda_m a^m$ называется *линейной комбинацией* векторов $a^1, a^2, \dots, a^m$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_m$.

Система векторов линейного пространства $a^1, a^2, \dots, a^m$ называется *линейно зависимой*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_m$ не равные одновременно нулю, что их линейная комбинация $\lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + \dots + \lambda_m a^m$ равняется нулевому вектору (вектору, все компоненты которого равны нулю). В противном случае систему $a^1, a^2, \dots, a^m$ называют *линейно независимой*, т. е. линейная комбинация данных векторов может быть равна нулевому вектору только при нулевых коэффициентах $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$.

Максимально возможное количество векторов, которые могут образовывать линейно независимую систему в данном линейном пространстве, называют *размерностью пространства*, а любую систему линейно независимых векторов в количестве, равном размерности, — *базисом пространства*.

Линейное пространство обычно обозначают как R^n , где n — его размерность.

Любое подмножество данного линейного пространства, которое само обладает свойствами линейного пространства, называется *линейным подпространством*.

Основные понятия линейной алгебры

Если рассматривается некоторое линейное пространство R^n , то принадлежащие ему аффинные множества размерности 1 называются *прямыми*, а размерности $(n-1)$ — *гиперплоскостями*. Так, обычная плоскость является гиперплоскостью для трехмерного геометрического пространства R^3 , а прямая — гиперплоскостью для плоскости R^2 . Всякая гиперплоскость делит линейное пространство на два *полупространства*.

Множество V векторов (точек) линейного пространства R^n называется *выпуклым*, если оно содержит отрезок прямой, соединяющей две его любые точки, или, другими словами, из того, что $a \in V$ и $b \in V$, следует, что $x = (1 - \lambda) \cdot a + \lambda \cdot b \in V$, где $0 \leq \lambda \leq 1$.

Линейная комбинация

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i a^i$$

векторов $a^1, a^2, \dots, a^m$ называется *выпуклой*, если $\lambda_i \geq 0, i=1:m$ и

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1.$$

Основные понятия линейной алгебры

- Множество, содержащее все возможные выпуклые комбинации точек некоторого множества M , **называют выпуклой оболочкой данного множества**. Можно показать, что выпуклая оболочка множества M является наименьшим выпуклым множеством, содержащим M .
- Точка v выпуклого множества V называется его угловой (крайней) точкой, если она не является внутренней точкой ни для какого отрезка, концы которого принадлежат множеству V . **Угловые точки выпуклого многогранника являются его вершинами, а сам он — выпуклой оболочкой своих вершин.**

Первая геометрическая интерпретация ЗЛП и графический метод решения

Рассмотрим следующий пример. Пусть дана задача
максимизации линейной целевой функции

$$f(x) = x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

на множестве

$$D = \{x \in R^2 \mid \begin{array}{l} x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ x_1 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{array} \}.$$

Первая геометрическая интерпретация ЗЛП и графический метод решения

- Так как количество переменных в неравенствах, задающих область допустимых планов задачи, равно двум, то **ее можно изобразить на координатной плоскости**.
- На рис. 1.1 показано, что **каждое неравенство определяет некоторую полуплоскость. Соответствующие области для каждого ограничения отмечены штрихами. Пересечение D данных полуплоскостей (т. е. множество точек, которые одновременно принадлежат каждой из них) является областью допустимых планов задачи**. Поведение целевой функции $f(x) = x_1 + 3x_2$ в рамках двумерной иллюстрации может быть охарактеризовано **с помощью линий уровней**

Первая геометрическая интерпретация ЗЛП и графический метод решения

- Напомним, что линией уровня функции называется множество точек из ее области определения, в которых функция принимает одно и то же фиксированное значение. **Градиентом функции $f(x)$** называется вектор, указывающий направление наиболее быстрого возрастания функции и ориентированный перпендикулярно линиям уровня $c = \nabla(c_1x_1 + c_2x_2) = (c_1, c_2)$
- Для линейной функции двух переменных линия уровня представляет собой прямую, перпендикулярную вектору c , который служит градиентом данной функции.

Первая геометрическая интерпретация ЗЛП и графический метод решения

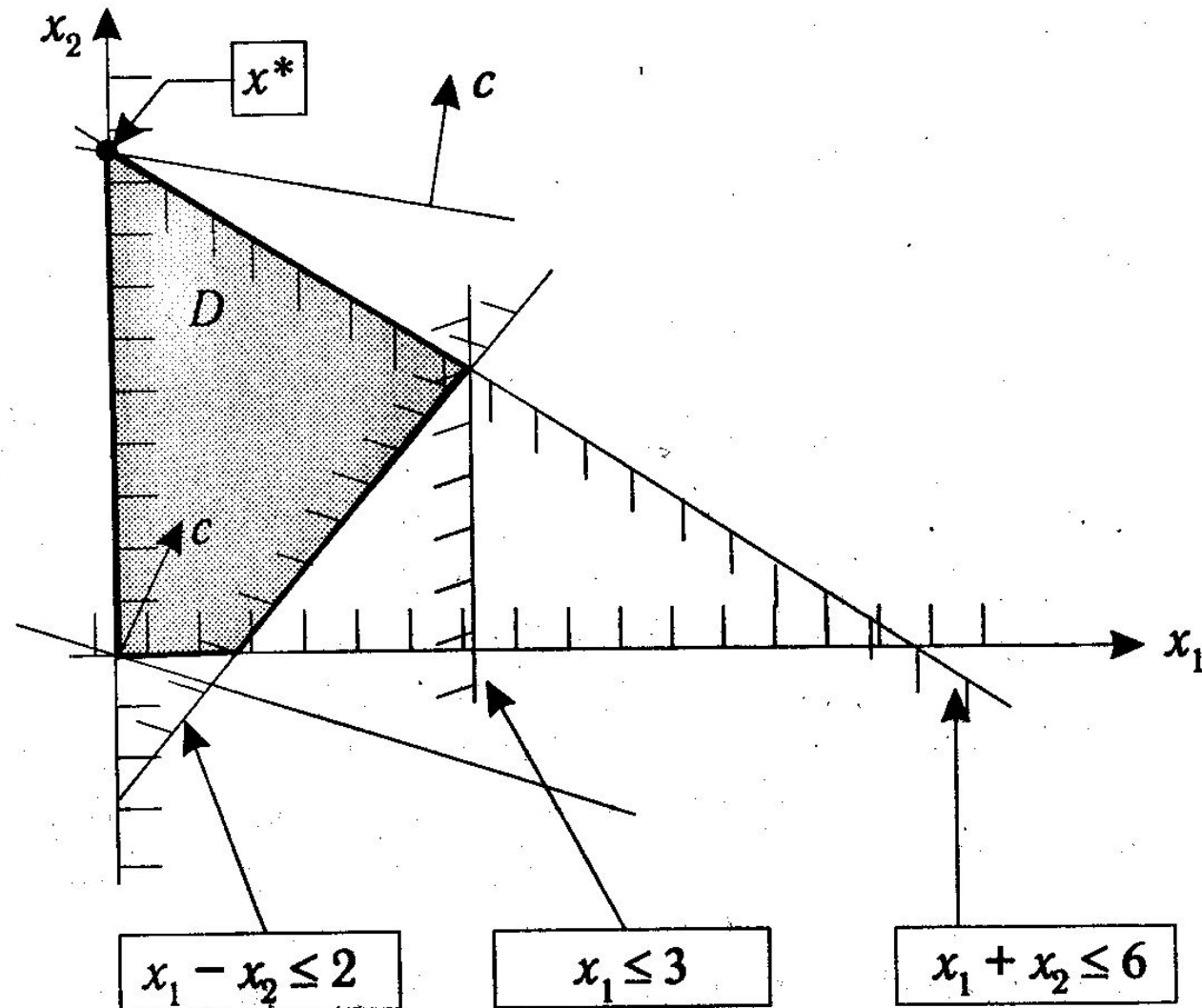
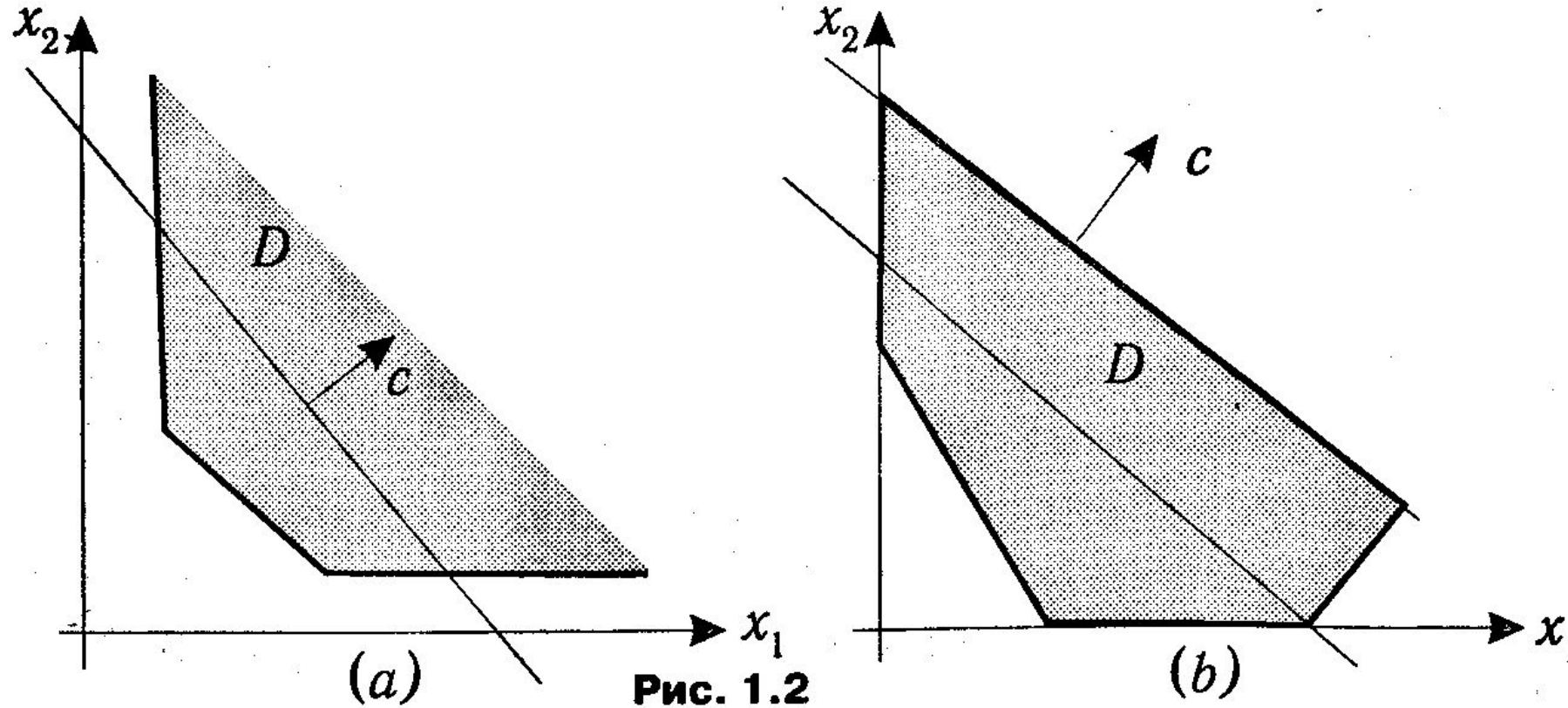


Рис. 1.1

Выводы

- С геометрической точки зрения **задача максимизации сводится к определению такой точки области D , через которую проходит линия уровня, соответствующая наибольшему из возможных значений**
- 1. Построить линию уровня для некоторого произвольного значения целевой функции.
- 2. Осуществлять ее параллельное передвижение (так, чтобы она оставалась перпендикулярной вектору c) до тех пор, пока не достигнем такой точки области допустимых планов D , из которой смещение в направлении вектора c было бы невозможно.
- **Такой метод решения получил название графического**

Частные случаи



а) функция не ограничена; б) бесконечно много решений

Применение графического метода

- Несмотря на свою очевидную ограниченность, графический метод решения ЗЛП часто оказывается полезным. В частности, **он может быть применен не только к задачам с двумя переменными** и ограничениями в виде неравенств, но и к каноническим задачам вида (1.7), **у которых $n - m = 2$, где n — количество переменных, а m — ранг матрицы A .**
- Действительно, можно выбрать две произвольные переменные x_{j1}, x_{j2} **и, используя систему уравнений, выразить через них остальные переменные**

Основные теоремы линейного программирования (доказательства в учебнике)

- **Теорема 1.1.** Если целевая функция f принимает максимальное значение в некоторой точке множества допустимых планов D , то она принимает это значение и в некоторой угловой точке данного множества.
 - **Теорема 1.2.** Если целевая функция f принимает максимальное значение в нескольких точках множества D , то она принимает это же значение в любой точке, являющейся их выпуклой комбинацией.
- 

БАЗИСНЫЕ РЕШЕНИЯ И ВТОРАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЗЛП

Векторная форма записи КЗЛП

- Каноническая ЗЛ $f(x) = cx \rightarrow \max, D = \{x \in R^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$.
- Обозначим через a_j столбцы матрицы A и будем рассматривать их как векторы пространства R^m . Тогда каждому допустимому плану КЗЛП — n -мерному вектору x — соответствует неотрицательная линейная комбинация столбцов a_j , равная столбцу $b \in R^m$:

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \dots + x_n a^n = b, \quad x_i \geq 0, \quad i \in 1:n. \quad (1.14)$$

- Такое представление ограничений КЗЛП обычно называют **векторной формой записи**

Векторная запись

Векторы a_j , $j \in n$ будем называть **векторами требований задачи** (D, f) , а вектор b — **вектором ограничений**. Множество всех неотрицательных линейных комбинаций столбцов a_j с геометрической точки зрения может быть представлено как многогранны выпуклый конус, натянутый на систему векторов a_j в пространстве R^m

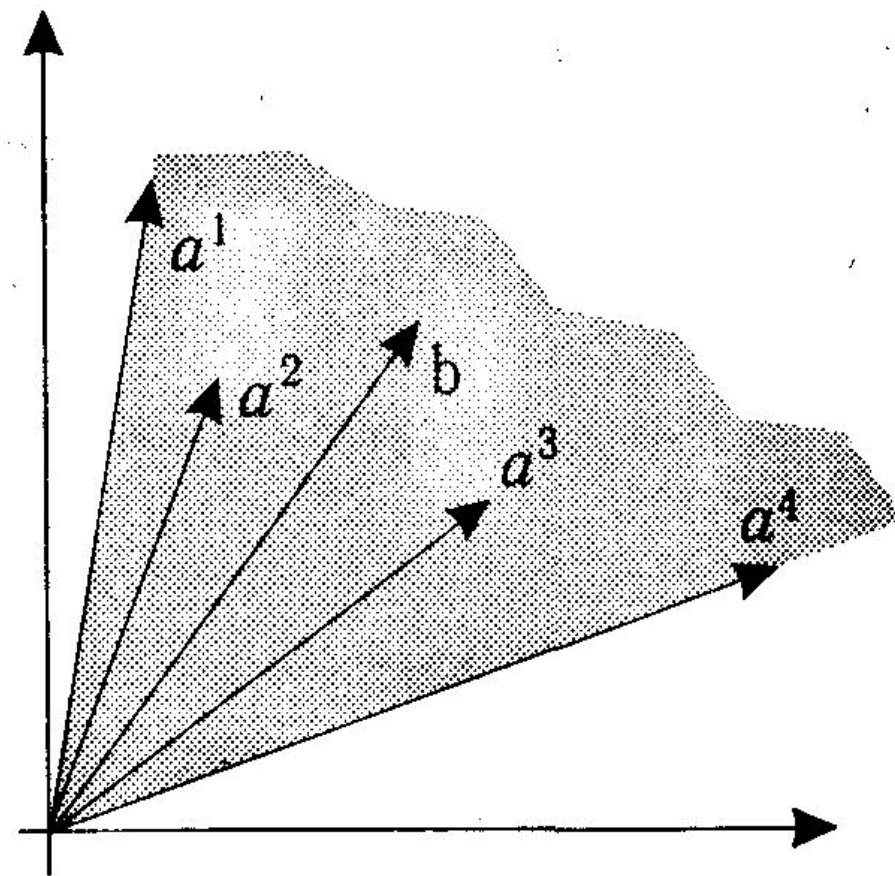


Рис. 1.3

Векторная запись. Самое важное

- Соответственно, **вопрос о существовании допустимого плана задачи** (D, f) равнозначен **вопросу о принадлежности вектора b данному конусу**, а компоненты x_j некоторого допустимого плана $x \in D$ являются не чем иным, как **коэффициентами разложения вектора ограничений задачи b по векторам требований a_j** .
- Такое представление КЗЛП получило название **второй геометрической интерпретации**.

Базис и размерность пространства решений

- В дальнейшем без ограничения общности можем предполагать, что **число уравнений, задающих множество D , меньше или равно числу переменных задачи ($m \leq n$)**. Действительно, если это не так, то либо система уравнений $Ax = b$ несовместна (и, значит, множество D пустое), либо содержит избыточные (линейно зависимые) уравнения.
- Если некоторые из столбцов $a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jm}$ матрицы A являются линейно независимыми, то **они образуют базис в пространстве R_m , и их, вообще говоря, будет достаточно для представления вектора b в виде линейной комбинации указанных столбцов.** Это означает, что остальные столбцы войдут в данное разложение с нулевыми коэффициентами.

Базисный план. Определение

- Пусть задана некоторая каноническая ЗЛП (D, f) , A — матрица системы ограничений задачи, и $\beta = \{a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jm}\}$ — линейно независимая система столбцов матрицы A , образующая базис R_m . Обозначим множество номеров столбцов, входящих в систему b , через $N(\beta) = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$. **План x называется базисным планом задачи (D, f) , если его компоненты, соответствующие базисным столбцам и называемые базисными компонентами, больше или равны нулю ($x_j \geq 0, j \in N(\beta)$), а все остальные компоненты (небазисные) — равны нулю ($x_j = 0, j \notin N(\beta)$).**
- Базисный план x называется невырожденным, если все его базисные компоненты строго положительны, и вырожденным в противном случае.

Свойства базисных планов

- Теорема 1.3. Каждый допустимый базисный план является угловой точкой множества допустимых планов D .
 - И обратное: если x — угловая точка множества D , то она является допустимым базисным планом задачи (D, f) .
 - Значение установленной связи между угловыми точками и допустимыми базисными решениями: **она позволяет формализовать (и тем самым существенно упростить) процесс перехода от одной угловой точки к другой.**
- 

ИДЕЯ И АЛГОРИТМ СИМПЛЕКС-МЕТОДА (без доказательства)



Основные этапы симплекс-метода

- Исходя из свойств линейных экстремальных задач, рассмотренных в предыдущих параграфах, можно заключить, что на принципиальном уровне **поиск их решений сводится к последовательному перебору угловых точек множества допустимых планов** или, что то же самое, **перебору соответствующих допустимых базисных планов.**
- Следует подчеркнуть, что такой **перебор для реальных многомерных задач возможен только в теоретическом плане и на практике неосуществим** (или крайне неэффективен) даже при условии использования мощной вычислительной техники. Средством решения данной проблемы явились прикладные оптимизационные методы, основанные на последовательном, целенаправленном переборе базисных планов ЗЛП.

Симлекс-метод

- Классическим методом решения ЗЛП стал **симплекс-метод**, получивший также в литературе название метода последовательного улучшения плана, разработанный в 1947г. американским математиком Джорджем Данцигом.
- Идея такого **перехода от одного базисного плана к другому**, при котором происходит «улучшение» значения целевой функции, может быть продемонстрирована для случая $m = 2$

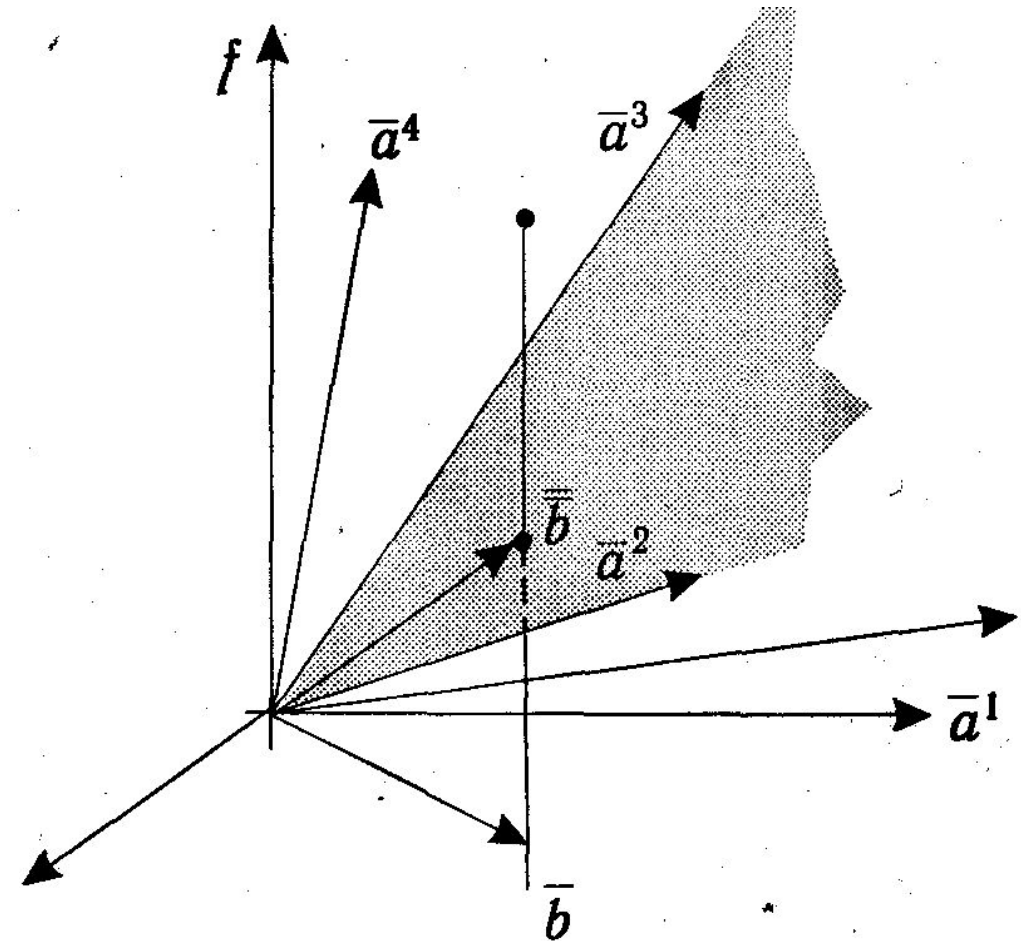


Рис. 1.4

Выбор базисного плана

- Если вектор ограничений b принадлежит конусу, натянутому на некоторые два базисных вектора условий $\{a_{j1}, a_{j2}\}$, то **существует такой базисный план x с базисными компонентами x_{j1}, x_{j2} , что $b = x_{j1} \cdot a_{j1} + x_{j2} \cdot a_{j2}$** . Разумеется, таких планов может быть несколько в зависимости от выбора системы базисных векторов.

- Чтобы различать их по соответствующей величине целевой функции $f(x) = c_{j1}x_{j1} + c_{j2}x_{j2}$, вводятся так называемые расширенные векторы условий и ограничений

$$\bar{a}' = (c_j, a') = (c_j, a_{1,j}, a_{2,j}, \dots, a_{m,j}), \quad (1.18)$$

- В общем случае расширенный столбец условий $\bar{a}_j$ получается соединением коэффициента целевой функции c_j и столбца a

$$\bar{b} = (0, b_1, b_2, \dots, b_m). \quad (1.19)$$

Расширенный вектор

- Рассмотрим также вектор

$$\bar{b} = x_{j_1} \bar{a}^{j_1} + x_{j_2} \bar{a}^{j_2} + \dots + x_{j_m} \bar{a}^{j_m}. \quad (1.20)$$

- Геометрически определение вектора b означает, что **он принадлежит конусу, натянутому на расширенные векторы, а вектор служит его проекцией**. Нулевая координата вектора b имеет вид:

$$\begin{aligned} \bar{b}_0 &= x_{j_1} \bar{a}_{0,j_1} + x_{j_2} \bar{a}_{0,j_2} + \dots + x_{j_m} \bar{a}_{0,j_m} = \\ &= x_{j_1} c_{j_1} + x_{j_2} c_{j_2} + \dots + x_{j_m} c_{j_m} = f(x), \end{aligned} \quad (1.21)$$

Геометрическая интерпретация

- Из геометрической иллюстрации следует, что **для решения задачи мы должны среди векторов $\bar{a}_j$ выбрать такой набор $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}$, чтобы, прямая, проведенная через конец вектора параллельно оси аппликат, **пересекала конус, натянутый на систему соответствующих расширенных столбцов $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2\}$, в «наивысшей» точке.****
- На рис. 1.4 выделен конус, натянутый на систему расширенных столбцов $\bar{a}_2$ и $\bar{a}_3$, отвечающих текущему допустимому базису. Нетрудно заметить, что данный базис не является оптимальным, например, для базиса $\{\bar{a}_3, \bar{a}_4\}$ точка пересечения соответствующего конуса и прямой будет находиться выше.

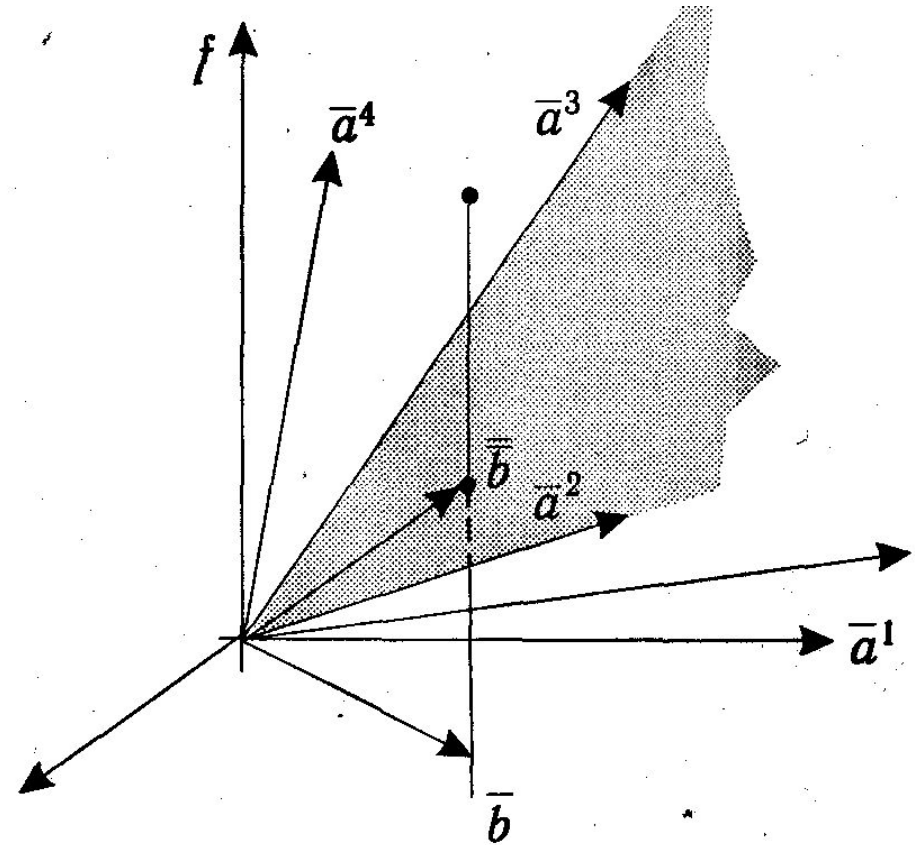


Рис. 1.4

Общая идея симплекс-метода

- Общая идея критерия, который используется в симплекс-методе для определения оптимальности (или неоптимальности) текущего плана: **если существуют векторы-столбцы, лежащие выше плоскости, проходящей через векторы текущего базиса, то он не является оптимальным и может быть «улучшен».**
- С вычислительной точки зрения критерий оптимальности в симплекс-методе реализуется через нахождение специальных оценок для небазисных векторов-столбцов, относительно текущего базиса.

Обозначения

- Набор базисных столбцов, получаемых на q -й итерации, будет обозначаться как $\beta(q)$:

$$\beta^{(q)} = \{a^{j_1}, a^{j_2}, \dots, a^{j_m}\}. \quad (1.22)$$

- Номера столбцов, входящих в базис, обозначим через $N(\beta(q))$

$$N(\beta^{(q)}) = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}. \quad (1.23)$$

- Тогда текущий базисный план x имеет вид:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \text{где } x_j = 0 \text{ для } j \notin N(\beta^{(q)}).$$

Обозначения

Обозначим через $\Delta(\beta(q))$ **матрицу**, составленную из столбцов $\{a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jm}\}$, **образующих базис**, через $\underline{\Delta}(\beta(q))$ матрицу, образованную из соответствующих расширенных столбцов и дополненную слева столбцом специального вида:

$$\bar{\Delta}(\beta^{(q)}) = \left[\begin{array}{c|cccc} -1 & c_{j_1} & c_{j_2} & \dots & c_{j_m} \\ \hline 0 & a_{1,j_1} & a_{1,j_2} & \dots & a_{1,j_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m,j_1} & a_{m,j_2} & \dots & a_{m,j_m} \end{array} \right], \quad (1.24)$$

а через $\Delta^{-1}(\beta(q))$ и $\underline{\Delta}^{-1}(\beta(q))$ — матрицы, обратные по отношению к ним.

Выводы

- Нулевая строка данной матрицы $a_0(\beta(q))$ содержит координаты расширенных векторов условий по оси аппликат. Согласно построению, элементы данной строки имеют следующие знаки
- $a_{0,j}(\beta(q)) < 0$ — для расширенных векторов условий, расположенных выше плоскости, натянутой на систему расширенных базисных векторов; // в алгоритме решения идет поиск отрицательных симплекс-компонент
- $a_{0,j}(\beta(q)) = 0$ — для расширенных базисных векторов.
- Подводя итог сказанному, сформулируем критерий оптимальности допустимого базисного плана в симплекс-методе:
- **план является оптимальным, если для всех $j \in 1:n$ $a_{0,j}(\beta(q)) \geq 0$, и неоптимальным в противном случае**

Идея симплекс-метода с учетом обозначений

- 1. Выбор текущего базиса.
- 2. В случае неоптимальности текущего базиса в алгоритме симплекс-метода осуществляется переход к следующему базису. Это делается за счет вывода одного столбца из базиса и ввода другого.
- 3. Для ввода нового столбца в базис рекомендуется выбирать **столбец, имеющий максимальную по модулю оценку.**
- 4. Выводится столбец с оценками $\lambda_i = \frac{b_i(\beta^{(q)})}{a_{i,l}(\beta^{(q)})}$, где $i \in \{1:m \mid a_{i,l}(\beta^{(q)}) > 0\}$
 $\lambda_r = \min_i \{\lambda_i\}$
- 5. Компонент $b_0(\beta(q))$ в соответствии с построением содержит значение целевой функции, достигаемое ею на текущем плане

Алгоритм симплекс-метода

- 0-этап. Нахождение допустимого базисного плана
 - I-этап. Стандартная итерация алгоритма — выполняется для очередного базисного плана
Проверка оптимальности текущего базисного плана.
 - II-этап. Если есть отрицательные оценки - базис не оптимален, выбираем максимальную по модулю оценку.
 - III-этап. Определение столбца, выводимого из базиса.
Пересчет элементов матрицы A и столбца b относительно нового базиса.
- 

Пример решения задачи симплекс-методом

$$f(x) = 50x_1 - 10x_2 + 6x_3 + 40x_4 - 30x_5 \rightarrow \max, \quad (1.34)$$

$$x_1 + x_4 + 3x_5 = 12,$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_4 = 14, \quad (1.35)$$

$$-2x_1 + 3x_3 - 4x_4 = 17,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \geq 0, \quad x_5 \geq 0 \}.$$

- Как видно, **столбцы матрицы с номерами {5, 2, 3} являются линейно независимыми.** И можно получить разложение по дан ным столбцам вектора ограничений с положительными коэффициентами.
- Последнее означает, что **столбцы {5, 2, 3} образуют допустимый базис, с которого можно начать решение задачи.**

Пример решения задачи симплекс-методом

Из столбцов, входящих в базис, с учетом нулевых элементов формируется матрица $\Delta(\beta(1))$ и обратная по отношению к ней $\Delta^{-1}(\beta(1))$:

$$\bar{\Delta}(\beta^{(1)}) = \left[\begin{array}{c|ccc} -1 & -30 & -10 & 6 \\ \hline 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right], \quad \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(1)}) = \left[\begin{array}{c|ccc} -1 & -10 & -10 & 2 \\ \hline 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{array} \right].$$

Пример решения задачи симплекс-методом

$$\bar{\Delta}(\beta^{(n)}) = \left[\begin{array}{c|ccc} -1 & -30 & -10 & 6 \\ \hline 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right], \quad \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(n)}) = \left[\begin{array}{c|ccc} -1 & -10 & -10 & 2 \\ \hline 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{array} \right].$$

$$\bar{b}(\beta^{(n)}) = \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(n)}) \times \bar{b} = \left[\begin{array}{c|ccc} -1 & -10 & -10 & 2 \\ \hline 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{array} \right] \times \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \\ 14 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -226 \\ 4 \\ 14 \\ 17/3 \end{bmatrix}$$

Используя их по формуле (1.26) получаем

$$\bar{A}(\beta^{(n)}) = \bar{\Delta}^{-1}(\beta^{(n)}) \bar{A} = \left[\begin{array}{c|ccc} -1 & -10 & -10 & 2 \\ \hline 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{array} \right] \times \begin{bmatrix} 50 & -10 & 6 & 40 & -30 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -84 & 0 & 0 & -88 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ -2/3 & 0 & 1 & -4/3 & 0 \end{vmatrix};$$

Решение задачи итеративно продолжается, пока оценки не будут положительными или равными 0

$$T^{(1)} = \begin{array}{c|cccc|c|c} & -226 & -84 & 0 & 0 & -88 & 0 \\ \hline 5 & 4 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1 \\ \hline 2 & 14 & 2 & 1 & 0 & \textcircled{3} & 0 \\ \hline 3 & 17/3 & -2/3 & 0 & 1 & -4/3 & 0 \end{array}$$

$$T^{(2)} = \begin{array}{c|cccccc} & 554/3 & -76/3 & 88/3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 5 & 22/9 & 1/9 & -1/9 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 4 & 14/3 & \textcircled{2/3} & 1/3 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 3 & 107/9 & 2/9 & 4/9 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$T^{(3)} = \begin{array}{c|cccccc} & 362 & 0 & 42 & 0 & 38 & 0 \\ \hline 5 & 5/3 & 0 & -1/6 & 0 & -1/6 & 1 \\ \hline 1 & 7 & 1 & 1/2 & 0 & 3/2 & 0 \\ \hline 3 & 31/3 & 0 & 1/3 & 1 & -1/3 & 0 \end{array}$$

Как видно из $T(3)$, **строка оценок содержит только неотрицательные значения**, поэтому достигнутый базис $N(\beta(3)) = \{5, 1, 3\}$ является оптимальным. В итоге мы получаем, что вектор $x^* = (7, 0, 31/3, 0, 5/3)$ является **оптимальным планом** (точкой максимума) задачи (1.34)-(1.35), **максимальное значение целевой функции равно $f^* = f(x^*) = 362$** , а решение КЗЛП имеет вид **$((7, 0, 31/3, 0, 5/3); 362)$** .

$$T^{(1)} = \left[\begin{array}{c|cccc|c} 5 & -226 & -84 & 0 & 0 & -88 & 0 \\ 2 & 4 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1 \\ 3 & 14 & 2 & 1 & 0 & \textcircled{3} & 0 \\ & 17/3 & -2/3 & 0 & 1 & -4/3 & 0 \end{array} \right]$$

Разъяснения: выбираем max по модулю столбец, это -88.

Рассчите $\lambda_r = \min\{\lambda_i\} = 4:1/3; 14:3; 17/3:(-4/3) = 12; 14/3; -17/4$.

Выбираем min положительный = 14/3. Определяем ведущий элемент=3, вектор№4 вводим в базис, а вектор№2 выводим.

Производим преобразования. Столбец -84, 1/3, 3, -4/3 необходимо превратить в 0, 0, 1, 0

Чтобы заработать 1, делим выделенную строку на 3, получаем 14/3, 2/3, **1/3**, 0, **1**, 0

Чтобы заработать нули:

Чтобы -88 превратить в **0** по методам Гаусса: $-88+x*3=0$.

Значит, $x=88/3$.

Чтобы $-4/3$ превратить в **0**: $-4/3+x*3=0 \Rightarrow x=4/9$

Чтобы $1/3$ превратить в **0**: $1/3+x*3=0 \Rightarrow x=-1/9$

Для оставшихся преобразований берем соответствующий каждой строчке x и по методу Гаусса домножаем:

$-226+88/3*14=554/3$; $-84+88/3*2=-76/3$; $0+88/3*1=88/3$.

$17/3+4/9*14=107/9$; $-2/3+4/9*2=2/9$; $0+4/9*1=4/9$

$4+(-1/9)*14=22/9$; $1/3+(-1/9)*2=1/9$; $0+(-1/9)*1=-1/9$

$$T^{(2)} =$$

		$554/3$	$-76/3$	$88/3$	0	0	0
5		$22/9$	$1/9$	$-1/9$	0	0	1
4		$14/3$	$2/3$	$1/3$	0	1	0
3		$107/9$	$2/9$	$4/9$	1	0	0

По аналогии вводим столбец (№1) в базис, у которого отрицательный компонент первой строки. Рассчитаем $\lambda_r = \min\{\lambda_i\}$ ищем min положительный $(22, 7, 107/2)=7$. Значит, выводим из базиса вектор №4, вводим вектор №1

$$-76/3 + x \cdot 2/3 = 0 \Rightarrow x = 38; \quad 554/3 + 38 \cdot 14/3 = 362; \quad 88/3 + 38 \cdot 1/3 = 42; \quad 0 + 38 \cdot 1 = 38$$

$$2/9 + x \cdot 2/3 = 0 \Rightarrow x = -1/3; \quad 107/9 + (-1/3) \cdot 14/3 = 93/9 = 31/3$$

$$1/9 + x \cdot 2/3 = 0 \Rightarrow x = -1/6; \quad 22/9 + (-1/6) \cdot 14/3 = 5/3$$

$$14/3 : 2/3 = 7$$

$$T^{(3)} =$$

		362	0	42	0	38	0
5		5/3	0	-1/6	0	-1/6	1
1		7	1	1/2	0	3/2	0
3		31/3	0	1/3	1	-1/3	0

Все компоненты строки целевой функции положительные.

**Ответ: оптимальный план задачи $x^*=(7,0,31/3,0,5/3)$;
 $f^*=362$**