

# Математические методы. Транспортные задачи



# Транспортная задача в матричной постановке и ее свойства

- Данная задача сводится к определению такого плана перевозок некоторого продукта из пунктов его производства в пункты потребления ( $\|x_{i,j}\|_{m \times n}$ ), который минимизирует целевую функцию

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{i,j} x_{i,j}$$

- на множестве допустимых планов

$$D = \{x \in R^{mn} \mid \sum_{j=1}^n x_{i,j} = a_i, i \in 1:m; \quad (3.2)$$

- при соблюдении условия баланса

$$\sum_{i=1}^m x_{i,j} = b_j, j \in 1:n;$$

$$x_{i,j} \geq 0, i \in 1:m, j \in 1:n \}$$

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

# Описание переменных

- Имеется  $m$  пунктов производства (хранения) некоторой однородной продукции
  - $n$  пунктов потребления данной продукции
  - $b(i)$  - запас продукции в  $i$ -том пункте пр-ва (хранения)
  - $a(j)$  - потребность  $j$ -того пункта потребления
  - $c(ij)$  - затраты на перевозку одной единицы продукции из пункта пр-ва  $i$  в пункт потребления  $j$
  - $x(ij)$  - объем перевозок продукции из пункта пр-ва  $i$  в пункт потребления  $j$
- 

# Матричная форма записи

- **Строки** транспортной таблицы соответствуют пунктам производства (в последней клетке каждой строки указан объем запаса продукта  $a_i$ ), а **столбцы** — пунктам потребления (последняя клетка каждого столбца содержит значение потребности  $b_j$ ).
- Все клетки таблицы (кроме тех, которые расположены в нижней строке и правом столбце) содержат информацию о перевозке из  $i$ -го пункта в  $j$ -й:  
**в левом верхнем углу находится цена перевозки** единицы продукта, **а в правом нижнем — значение объема перевозимого груза** для данных пунктов.

# Матричная форма записи

|                        |                        |     |                        |       |
|------------------------|------------------------|-----|------------------------|-------|
| $c_{1,1}$<br>$x_{1,1}$ | $c_{1,2}$<br>$x_{1,2}$ | ... | $c_{1,n}$<br>$x_{1,n}$ | $a_1$ |
| $c_{2,1}$<br>$x_{2,1}$ | $c_{2,2}$<br>$x_{2,2}$ | ... | $c_{2,n}$<br>$x_{2,n}$ | $a_2$ |
| ...                    | ...                    | ... | ...                    |       |
| $c_{m,1}$<br>$x_{m,1}$ | $c_{m,2}$<br>$x_{m,2}$ | ... | $c_{m,n}$<br>$x_{m,n}$ | $a_m$ |
| $b_1$                  | $b_2$                  | ... | $b_n$                  |       |

# Построение исходного допустимого плана в транспортной задаче

- Наиболее простой способ его нахождения основывается на так называемом **методе северо-западного угла**.
- Суть метода состоит в последовательном распределении всех запасов, имеющихся в первом, втором и т. д. пунктах производства, по первому, второму и т. д. пунктам потребления. Каждый шаг распределения сводится к попытке полного исчерпания запасов в очередном пункте производства или к попытке полного удовлетворения потребностей в очередном пункте потребления.
- Построение допустимого начального плана, согласно методу северо-западного угла, **начинается с левого верхнего угла транспортной таблицы**, при этом полагаем  $a_i(0) = a_i$ ,  $b_j(0) = b_j$ .

# Метод северо-западного угла

Таблица 3.1

|    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|
| 14 | 28 | 21 | 28 | 27 |
| 10 | 17 | 15 | 24 | 20 |
| 14 | 30 | 25 | 21 | 43 |
| 33 | 13 | 27 | 17 |    |

Таблица 3.2

|    |    |    |    |    |    |   |   |
|----|----|----|----|----|----|---|---|
| 27 |    |    |    | 27 | 0  |   |   |
| 6  | 13 | 1  |    | 20 | 14 | 1 | 0 |
|    |    | 26 | 17 | 43 | 17 | 0 |   |
| 33 | 13 | 27 | 17 |    |    |   |   |
| 6  | 0  | 26 |    |    |    |   |   |
| 0  |    | 0  |    |    |    |   |   |



# Критика

- Особенностью допустимого плана, построенного методом северо-западного угла, является то, что **целевая функция на нем принимает значение, как правило, далекое от оптимального.**
- Это происходит потому, что при его построении никак не учитываются значения  $c_{i,j}$ . В связи с этим на практике для получения исходного плана используется другой способ — **метод минимального элемента**, в котором при распределении объемов перевозок в первую очередь занимают клетки с наи меньшими ценами.



# Метод минимального элемента

Метод минимальной стоимости

Таблица 38.3

| $a_i \backslash b_j$ | 40                     | 60                     | 80                     | 60                     |
|----------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 60                   | <b>40</b> <sup>1</sup> | 3                      | 4                      | <b>20</b> <sup>2</sup> |
| 80                   | 4                      | 5                      | <b>40</b> <sup>8</sup> | <b>40</b> <sup>3</sup> |
| 100                  | 2                      | <b>60</b> <sup>3</sup> | <b>40</b> <sup>6</sup> | <sup>7</sup>           |

# Постановка метода потенциалов

$$f^*(u, v) = \sum_{j=1}^n v_j b_j - \sum_{i=1}^m u_i a_i \rightarrow \max, \quad (3.6)$$

$$D^* = \{u \in R^m, v \in R^n \mid v_j - u_i \leq c_{i,j}, i \in 1:m, j \in 1:n\}. \quad (3.7)$$

- Переменные  $u_i$  называют потенциалами пунктов производства, а  $v_j$  — потенциалами пунктов потребления.
- Применяя доказанные в главе 1 теоремы двойственности (см. теорему 1.7), можно получить критерий оптимальности для плана транспортной задачи

# Постановка метода потенциалов

- Для того, чтобы допустимый план транспортной задачи  $x_{i,j}$  был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы нашлись такие потенциалы  $u_i, v_j$ , для которых

$$v_j - u_i = c_{i,j}, \text{ если } x_{i,j} > 0, \quad (3.8)$$

$$v_j - u_i \leq c_{i,j}, \text{ если } x_{i,j} = 0. \quad (3.9)$$

# Алгоритм метода потенциалов

- 1. Найти базисный план (например, методом С-З угла)
- 2. Потенциал первого пункта потребления принимаем равным нулю ( $v_1=0$ ).
- 3. Теперь, зная его, мы можем определить потенциалы для всех пунктов производства, связанных с первым пунктом ненулевыми перевозками. В данном случае их два (это первый и второй пункты), получаем:

$$u_1 = v_1 - c_{1,2} = 0 - 14 = -14, \quad u_2 = v_1 - c_{2,2} = 0 - 10 = -10.$$

# Алгоритм метода потенциалов

Имея  $u_2$  и учитывая, что во второй строке таблицы существуют еще ненулевые компоненты  $x_{2,2}$  и  $x_{2,3}$ , можно определить  $v_2 = u_2 + c_{2,2} = -10 + 17 = 7$  и  $v_3 = u_2 + c_{2,3} = -10 + 15 = 5$ , после чего появляется возможность рассчитать  $u_3 = v_3 - c_{3,3} = 5 - 25 = -20$  и, наконец,  $v_4 = u_3 + c_{3,4} = -20 + 21 = 1$ .

|             | $v_1 = 0$ | $v_2 = 7$ | $v_3 = 5$ | $v_4 = 1$ |    |
|-------------|-----------|-----------|-----------|-----------|----|
| $u_1 = -14$ | 14<br>27  | 28        | 21        | 28        | 27 |
| $u_2 = -10$ | 10<br>6   | 17<br>13  | 15<br>1   | 24        | 20 |
| $u_3 = -20$ | 14        | 30        | 25<br>26  | 21<br>17  | 43 |
|             | 33        | 13        | 27        | 17        |    |

# Расчет разницы потенциалов

- Для свободных клеток транспортной таблицы вычисляются величины  $\alpha_{i,j} = v_j - u_i$ , называемые разностями потенциалов.
- В табл. 3.4 они выписаны для всех небазисных клеток под ценами.

|             | $v_1 = 0$ | $v_2 = 7$ | $v_3 = 5$ | $v_4 = 1$ |    |
|-------------|-----------|-----------|-----------|-----------|----|
| $u_1 = -14$ | 14<br>27  | 28<br>21  | 21<br>19  | 28<br>15  | 27 |
| $u_2 = -10$ | 10<br>6   | 17<br>13  | 15<br>1   | 24<br>11  | 20 |
| $u_3 = -20$ | 14<br>20  | 30<br>27  | 25<br>26  | 21<br>17  | 43 |
|             | 33        | 13        | 27        | 17        |    |



# Разность потенциалов

- Разность потенциалов  $\alpha_{i,j}$  можно трактовать как **увеличение цены продукта при его перевозке из пункта  $i$  в пункт  $j$ .**
- Согласно критерию оптимальности, если все  $\alpha_{i,j} \leq c_{i,j}$ , то план оптимален, в противном случае, **если существует хотя бы одна разность потенциалов  $\alpha_{i,j} > c_{i,j}$ , то он может быть улучшен.**
- Процесс «улучшения» плана состоит в определении вводимой и выводимой клеток, в чем прослеживается содержательная аналогия с соответствующими пунктами симплекс-процедур.



$20 > 14$  - значит, план не оптимален

Таблица 3.5

|             | $v_1 = 0$     | $v_2 = 7$ | $v_3 = 5$     | $v_4 = 1$ |    |
|-------------|---------------|-----------|---------------|-----------|----|
| $u_1 = -14$ | 14<br>27      | 28<br>21  | 21<br>19      | 28<br>15  | 27 |
| $u_2 = -10$ | 10<br>6<br>⊖  | 17<br>13  | 15<br>1<br>⊕  | 24<br>11  | 20 |
| $u_3 = -20$ | 14<br>20<br>⊕ | 30<br>27  | 25<br>26<br>⊖ | 21<br>17  | 43 |
|             | 33            | 13        | 27            | 17        |    |

# Алгоритм метода потенциалов

- 1. В клетке, претендующей на ввод в базис, должен стоять “+”
  - 2. Все остальные узлы цепочки должны располагаться в базисных клетках
  - 3. “+” и “-” в узлах должны чередоваться
  - 4. Звенья цепи должны быть только горизонтальными и вертикальными
  - 5. В каждом узле цепочка поворачивается на 90 градусов
  - 6. Цепочка должна быть замкнутой
- 

# Построение цепочки

- 1.  $X$  - новая перевозка
- 2.  $6 - X$  - так как надо уменьшить на  $X$ , чтобы соблюдают условие баланса
- 3.  $1+X$ ;  $26 - X$  - аналогично
- 4.  $25 > 21$  - значит, текущий план не оптимален

|             | $v_1 = 0$    | $v_2 = 13$    | $v_3 = 11$    | $v_4 = 7$ |    |
|-------------|--------------|---------------|---------------|-----------|----|
| $u_1 = -14$ | 14<br>27     | 28<br>27      | 21<br>25      | 28<br>21  | 27 |
| $u_2 = -4$  | 10<br>4<br>— | 17<br>13<br>— | 15<br>7<br>+  | 24<br>11  | 20 |
| $u_3 = -14$ | 14<br>6<br>+ | 30<br>27<br>— | 25<br>20<br>— | 21<br>17  | 43 |
|             | 33           | 13            | 27            | 17        |    |

# Оптимальный план

- Из транспортной таблицы 3.7 видно, что полученный план оптимален, так как все разности потенциалов для небазисных клеток  $\alpha_{i,j} = v_j - u_i$  не превышают соответствующих цен  $c_{i,j}$ .
- По данному плану вычисляется оптимальное (наименьшее) значение суммарных издержек на перевозку

|             | $v_1 = 0$ | $v_2 = 9$ | $v_3 = 7$ | $v_4 = 7$ |    |
|-------------|-----------|-----------|-----------|-----------|----|
| $u_1 = -14$ | 14<br>7   | 28<br>23  | 21<br>20  | 28<br>21  | 27 |
| $u_2 = -8$  | 10<br>8   | 17<br>13  | 15<br>7   | 24<br>15  | 20 |
| $u_3 = -14$ | 14<br>26  | 30<br>23  | 25<br>21  | 21<br>17  | 43 |
|             | 33        | 13        | 27        | 17        |    |

$$f(x^*) = 14 \times 7 + 21 \times 20 + 17 \times 13 + 15 \times 7 + 14 \times 26 + 21 \times 17 = 1565.$$